NOŢIUNI TEORETICE PENTRU BACALAUREAT

Formule de calcul

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$

Funcţia de gradul I

Definiţie: $f:R \to R, f(x)=ax+b, a \neq 0$, $a,b \in R$, se numeşte funcţia de gradul I

Proprietăţi: Dacă a>0 f este strict crescătoare

Dacă a<0 f este strict descrescătoare

$A(\alpha, \beta) \in G_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$

Funcţia de gradul II

Definiţie: $f:R \to R, f(x)=ax^2 + bx + c, a \neq 0$, $a,b,c \in R$ se numeşte funcţia de gradul II

Maximul sau minimul funcţiei de gradul II

Dacă a<0 atunci $f_{max} = \dfrac{-\Delta}{4a}$, *realizat* pentru $x = \dfrac{-b}{2a}$

Dacă a >0 atunci $f_{min} = \dfrac{-\Delta}{4a}$, *realizat* pentru $x = \dfrac{-b}{2a}$;Vârful parabolei $V(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a})$

Ecuaţia de gradul II: $ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$

Relaţiile lui Viete: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale şi diferite.

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale şi egale.

Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuaţia nu are rădăcini reale.

Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale.

Intervale de monotonie :a<0

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	∞
f(x)	$\nearrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$

a>0

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	∞
f(x)	$\searrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$

Semnul funcţiei de gradul II

$\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
f(x)		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

$\Delta = 0$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		∞
f(x)		semnul lui a	0	semnul lui a	

$\Delta < 0$

x	$-\infty$		∞
f(x)		semnul lui a	

Imaginea funcţiei de gr.II

a<0,Imf=$(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$

a>0, Imf=$[\frac{-\Delta}{4a}, \infty)$

Funcţii

Definiţii: Fie f:A$\rightarrow$B

I. 1)**Funcţia f se numeşte injectivă**,dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

2)**Funcţia f este injectivă** dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

3)**Funcţia f este injectivă**, dacă orice paralelă la axa 0x,dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.

4)Funcţia f nu este injectivă dacă $\exists x_1 \neq x_2 a.i. f(x_1) = f(x_2)$

II.1)**Funcţia *f* este surjectivă**, dacă $\forall$ y $\in$B, există cel puţin un punct x $\in$A, a.î. f(x)=y.

2) Funcţia f este surjectivă, dacă f(A) =B.

3) Funcţia f este surjectivă, dacă orice paralelă la axa 0x, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.

III.1) **Funcţia $f$este bijectivă** dacă este injectivă şi surjectivă.

2) Funcţia f este bijectivă dacă pentru orice y $\in$B există un singur x $\in$A a.î. f(x) =y (ecuaţia f(x)=y,are o singură soluţie,pentru orice y din B)

3) Funcţia f este bijectivă dacă orice paralelă la axa 0x, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei într-un singur punct .

IV.Compunerea a două funcţii

Fie f:A$\rightarrow$B,g:B$\rightarrow$C

$g \circ f : A \rightarrow C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

V. $1_A : A \rightarrow A$ prin $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$.(aplicaţia identică a lui A)

Definiţie: Funcţia f: A$\rightarrow$B **este inversabilă** , dacă există o funcţie g:B$\rightarrow$A astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$, funcţia g este inversa funcţiei f şi se notează cu f^{-1}.

Teoremă: f este bijectivă <=> f este inversabilă.

Funcţii pare,funcţii impare,funcţii periodice.

Definiţii:

f:R→R se numeşte funcţie pară dacă f(-x) = f(x), $\forall$ $x \in R$

f:R→R se numeşte funcţie impară dacă f(-x) = -f(x), $\forall$ $x \in R$

f:A→R($A \subset R$) se numeşte periodică de perioadă $T \neq 0, dacă \forall x \in A$ avem x+T$\in A$ şi f(x+T)=f(x).Cea mai mică perioadă strict pozitivă se numeşte perioada principală.

Numărul funcţiilor f:A→B este $[n(B)]^{n(A)}$,n(A) reprezentâd numărul de elemente al mulţimii A.

Numărul funcţiilor bijective f:A→A este egal cu n!,n fiind numărul de elemente al mulţimii A.

Numărul funcţiilor injective f:A→B este A_n^k,unde n reprezintă numărul de elemente al mulţimii B, iar k al mulţimii A($k \leq n$)

Funcţia exponenţială

Definiţie f: R→ (0,∞), f(x)= a^x ,a>0,a $\neq 1$ se numeşte funcţie exponenţială.

Proprietăţi:

1)Dacă a>1 $\Rightarrow$ f strict crescătoare

2)Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f strict descrescătoare

3)Funcţia exponenţială este bijectivă

Funcţia logaritmică

Definiţie: f:(0,∞) →R, f(x)= $\log_a x$, a>0, a $\neq$ 1 se numeşte funcţie logaritmică.

Proprietăţi:

1)Dacă a >1 $\Rightarrow$ f strict crescătoare

2)Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f strict descrescătoare

3)Funcţia logaritmică este bijectivă

4)$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 5)$\log_a x^m = m\log_a x$,$m \in R$

6)$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ 7)$a^{\log_a x} = x$

Schimbarea bazei:$\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$,$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Progresii aritmetice

Definiţie: Se numeşte **progresie aritmetică** un şir de numere reale a_n în care diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant r, numit raţia progresiei aritmetice:$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \geq 1$

Se spune că numerele $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sunt în progresie aritmetică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Teoremă:şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$

Termenul general al unei progresii aritmetice:$a_n = a_1 + (n-1)r$

Prop.:Numerele a,b,c sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow b=\frac{a+c}{2}$

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice:$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie aritmetică de forma :

$x_1=u-r, x_2=u, x_3=u+r$; $u,r\in R$.

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie aritmetică astfel:

$x_1=u-3r$, $x_2=u-r$, $x_3=u+r$, $x_4=u+3r$, $u,r\in R$.

Progresii geometrice

Definiţie : Se numeşte **progresie geometrică** un şir de numere reale $b_n, b_1\neq 0$ în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant q, numit raţia progresiei geometrice: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=q$,$q\neq 0$

Se spune că numerele $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sunt în progresie geometrică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Teoremă:şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}, \forall n\geq 2$

Termenul general al unei progresii geometrice:$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$

Prop.:Numerele a,b,c sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b^2=a\cdot c$

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice: $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$,$q\neq 1$ sau

$S_n=n\cdot b_1, dacă$ q = 1

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie geometrică de forma :

$x_1=\frac{u}{q}, x_2=u, x_3=u\cdot q, q\neq 0$

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie geometrică de forma:

$x_1=\frac{u}{q^3}, x_2=\frac{u}{q}, x_3=u\cdot q, x_4=u\cdot q^3, q\neq 0$

Formule utile:

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

Modulul numerelor reale Proprietăţi:

$$|x|=\begin{cases}x, x\geq 0\\ -x, x<0\end{cases}$$

1. $|x| \geq 0, \forall x \in R$ **2.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ **3.** $|x| = |-x|$ **4.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ **5.** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

6. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$ **7.** $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty), a > 0$ **8.** $|x + y| \leq |x| + |y|$

Partea întreagă

1.x = $[x]+\{x\}$, $\forall x \in R$, $[x] \in Z$ și $\{x\} \in [0,1)$

2. $[x] \leq x < [x]+1$, $[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1$

3. $[x+k]=[x]+k, \forall x \in R, k \in Z$

4. $\{x+k\}=\{x\}, \forall x \in R, k \in Z$

Numere complexe

1. Numere complexe sub formă algebrică

z =a+bi, a,b$\in R$, $i^2 = -1$, a=Re z , b=Im z

C- mulțimea numerelor complexe;C=$\{a+bi/a,b \in R\}$

Conjugatul unui număr complex: $\overline{z} = a - bi$

Proprietăți:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3. $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5.z$\in R \Leftrightarrow z = \overline{z}$

6.z$\in R^* i \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Modulul unui număr complex: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proprietăți:

1. $|z| \geq 0, \forall z \in C$ 2. $|z| = |\overline{z}|$ 3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4. $|z^n| = |z|^n$ 5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Numere complexe sub formă trigonometrică

Forma trigonometrică a numerelor complexe:

z = r(cos t + i sin t) ,r = $\sqrt{a^2 + b^2}$, $tgt = \frac{b}{a}$;r-raza polară;t-argument redus,t$\in [0,2\pi)$

M(a,b)-reprezintă imaginea geometrică a numărului complex z = a+bi

Operații:

$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1), z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)], z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)]$

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + i\sin\frac{t+2k\pi}{n}), k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$$

Combinatorică

$n! = 1\cdot 2\cdots n, n \in N (0! = 1)$, $P_n = n!, n \in N^*$

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 \le k \le n; k,n \in N, n \ge 1$ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \le k \le n; k,n \in N$

Proprietăţi: 1. $C_n^k = C_n^{n-k}, 0 \le k \le n; k,n \in N$ 2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, 1 \le k < n; k,n \in N$

Binomul lui Newton: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n$

Termenul general: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k = 0,1,\cdots,n$

Proprietăţi:

$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ (numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este 2^n).

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$

Geometrie vectorială

Definiţie:

Se numesc vectori egali, vectorii care au aceeaşi direcţie,acelaşi sens şi acelaşi modul.
Doi vectori se numesc opuşi dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sensuri contrare:
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Definiţie:

Doi vectori se numesc **coliniari** dacă cel puţin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli şi au aceeaşi direcţie. În caz contrar se numesc necoliniari.

Teoremă: Fie $\vec{a} şi \vec{b}$ doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul $\vec{v}$, există $\alpha, \beta \in R(unice)$ astfel încât $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$

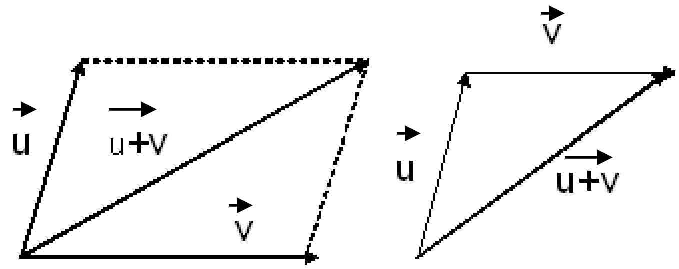
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ -modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A) - coordonatele$ vectorului $\overrightarrow{AB}$

Mijlocul segmentului AB: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Centrul de greutate al triunghiului ABC: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Adunarea vectorilor se poate face după regula paralelogramului sau triunghiului



Teoremă:Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt **coliniari** $\Leftrightarrow \exists \ \lambda \in R \ a.i. \ \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \exists \ \lambda \in R \ a.i. \ \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$

AB $\|$ CD $\Leftrightarrow \exists \ \lambda \in R \ a.i. \ \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$

Produsul scalar a doi vectori .

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{u} = \ x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, v = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2, |\vec{u}| = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$

Daca $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$,atunci $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ecuaţiile dreptei în plan

Ecuaţia carteziană generală a dreptei:**ax+by+c=0** (d)

Punctul M(x_M,y_M)$\in d \Leftrightarrow a \cdot x_M + by_M + c = 0$

Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte:A(x_A, y_A),B(x_B, y_B)

AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$=0

Ecuaţia dreptei determinată de un punct A(x_A, y_A) şi panta m : y-$y_A$$= m(x - x_A)$

Dreptele d_1,d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$

Dreptele d_1,d_2 sunt perpendiculare $\Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2}$ = -1

Distanţa dintre punctele A(x_A, y_A),B(x_B, y_B):AB=$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Distanţa de la punctul A(x_A, y_A) la dreapta h:ax+by+c=0:

d(A,h)=$\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Punctele A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

Permutări

Definiţie:Se numeşte permutare de gradul n a mulţimii $A=\{1,2,\cdots,n\}$ orice funcţie bijectivă $\sigma: A\to A$.

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$ se numeşte permutarea identică de gradul n**.**

S_n reprezintă mulţimea permutărilor de gradul n.

Produsul(compunerea) a două permutări:Fie $\sigma,\tau\in S_n$

$\sigma\circ\tau: A\to A, (\sigma\circ\tau)(k)=\sigma(\tau(k))$

Proprietăţi:

1) $(\sigma\tau)\delta=\sigma(\tau\delta), \forall\sigma,\tau,\delta\in S_n$

2) $\sigma e=e\sigma=\sigma, \forall\sigma\in S_n$

3) $\forall\sigma\in S_n, \exists\sigma^{-1}\in S_n a.i. \sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=e$**,** σ^{-1} se numeşte inversa permutării σ

Puterile unei permutări: $Fie \sigma\in S_n - definim \sigma^n=\sigma^{n-1}\sigma, n\in N^*(\sigma^0=e)$

Prop.: $Fie \sigma\in S_n \Rightarrow \sigma^m\sigma^n=\sigma^{m+n}, (\sigma^m)^n=\sigma^{mn}, \forall m,n\in N$

Inversiunile unei permutări:

Definiţie: $Fie \sigma\in S_n$ şi i,j$\in\{1,2,\cdots,n\}$, $i\langle j$ .Perechea (i,j) se numeşte inversiune a permutării σ dacă $\sigma(i)\rangle\sigma(j)$.Numărul inversiunilor permutării σ se notează cu m(σ).

Definiţii: Se numeşte semnul permutării σ,numărul $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}$

Permutarea σ se numeşte permutare pară dacă $\varepsilon(\sigma)=1$

Permutarea σ se numeşte permutare impară dacă $\varepsilon(\sigma)=-1$

Propoziţie: $\varepsilon(\sigma\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau), \forall\sigma,\tau\in S_n$

Permutarea $\delta_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & i & j & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & j & i & \cdots & n\end{pmatrix}$ se numeşte transpoziţie.

Proprietăţi:

1) $\delta_{ij}=\delta_{ji}$ 2) $(\delta_{ij})^2=e$ 3) $\delta_{ij}^{-1}=\delta_{ij}$ 4) $\varepsilon(\delta_{ij})=-1$

Matrice

A=$\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}......a_{1n}\\ a_{21}a_{22}......a_{2n}\\ ....\\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn}\end{pmatrix}$-matrice cu m linii şi n coloane; $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$

$A\in M_{m,n}(C)$**,**unde $M_{m,n}(C)$**-**reprezintă mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente din C.

${}^{t}A \in M_{n,m}(C)$ -reprezintă transpusa lui A şi se obţine din A prin schimbarea liniilor în coloane(sau a coloanelor în linii).
Dacă m = n atunci matricea se numeşte pătratică de ordinul n şi are forma

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix} - A \in M_n(C)$$

Tr(A)= $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ -reprezintă urma matricei A
Sistemul ordonat de elemente $(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ se numeşte diagonala principală a matricei A,iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n},\cdots,a_{n1})$ se numeşte diagonala secundară a matricei A.

$I_n=\begin{pmatrix} 100\cdots\cdots 0 \\ 010\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 000\cdots\cdots 1 \end{pmatrix}$ -matricea unitate de ordinul n ; $O_{m,n}=\begin{pmatrix} 000\cdots\cdots 0 \\ 000\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 000\cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$ -matricea nulă

Proprietăţi ale operaţiilor cu matrice.:
1)A+B=B+A , $\forall A,B \in M_{m,n}(C)$ (comutativitate)
2)(A+B)+C = A+(B+C) , $\forall A,B,C \in M_{m,n}(C)$ (asociativitate)
3)A+ $O_{m,n}$ = $O_{m,n}$ +A = A , $\forall A \in M_{m,n}(C)$
4) $\forall A \in M_{m.n}(C), \exists(-A) \in M_{m,n}(C)$ a.î. A+(-A) = (-A)+A= $O_{m,n}$, $\forall A \in M_{m,n}(C)$
5)(AB)C = A(BC) , $A \in M_{m,n}(C), B \in M_{n,p}(C), C \in M_{p,q}(C)$ (asociativitate)
6)a)A(B+C) = AB+AC , $A \in M_{m,n}(C), B,C \in M_{n,p}(C)$ (distributivitatea înmulţirii faţă de adunare)
b)(B+C)A = BA+CA, $B,C \in M_{m,n}(C), A \in M_{n,p}(C)$
7) $AI_n = I_nA = A, \forall A \in M_n(C)$
8)a(bA) = (ab)A, $\forall a,b \in C, A \in M_{m,n}(C)$
9)(a+b)A=aA+bA, $\forall a,b \in C, A \in M_{m,n}(C)$
10)a(A+B)=aA+aB, $\forall a \in C, A,B \in M_{m,n}(C)$
11)aA = $O_{m,n} \Leftrightarrow a=0$ sau A= $O_{m,n}$
12) ${}^{t}({}^{t}A)=A, {}^{t}(A+B)={}^{t}A+{}^{t}B$, ${}^{t}(aA)=a\,{}^{t}A, {}^{t}(AB)={}^{t}B\,{}^{t}A$
Puterile unei matrice:Fie $A \in M_n(C)$
Definim $A^0=I_n, A^1=A, A^2=A\cdot A, A^3=A^2\cdot A,\cdots, A^n=A^{n-1}\cdot A, n \in N^*$

Relaţia Hamilton-Cayley: $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$,unde $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Determinanţi.

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (determinantul de ordinul doi)

Determinantul de ordinul trei(regula lui Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

Proprietăţi:

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse;
2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul;
3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii(sau coloane) între ele obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.
4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul;
5. Dacă toate elementele unei linii(sau coloane) ale unei matrice sunt înmulţite cu un element a, obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu a înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.
6. Dacă elementele a două linii(sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale atunci determinantul matricei este nul;
7. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinaţie liniară de celelate linii(sau coloane) atunci determinantul matricei este nul.
8. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulţite cu acelaşi element se obţine o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei iniţiale;

9) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+m & e+n & f+p \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ g & h & i \end{vmatrix}$

10) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, $\forall$ $A,B \in M_n(C)$

Definiţie:Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ .Se numeşte minor asociat elementului $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ **determinantul matricei obţinute din A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j.Se notează acest minor cu** M_{ij}.

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ se numeşte complementul algebric al elementului a_{ij} .

Matrice inversabile

Inversa unei matrice :$A \in M_n(C)$ se numeşte inversabilă dacă există o matrice notată $A^{-1} \in M_n(C)$ a.i. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

Teoremă: $A \in M_n(C)$ *inversabilă* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, A^* adjuncta matricei A. A^* se obține din ${}^tA$ înlocuind fiecare element cu complementul său algebric.

Dacă $A, B \in M_n(C)$ sunt inversabile, atunci au loc relațiile: a) $(A^{-1})^{-1} = A$ b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Rangul unei matrice

Fie $A \in M_{m,n}(C)$, $r \in N, 1 \le r \le \min(m,n)$

Definiție: Se numește minor de ordinul r al matricei A, determinantul format cu elementele matricei A situate la intersecția celor r linii și r coloane.

Definiție: Fie $A \neq O_{m,n}$ o matrice . Numărul natural r este rangul matricei A $\Leftrightarrow$ există un minor de ordinul r al lui A, nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli.

Teoremă: Matricea A are rangul r $\Leftrightarrow$ există un minor de ordin r al lui A, nenul , iar toți minorii de ordin r+1 (dacă există) obtinuți prin bordarea (adaugarea unei linii și a unei coloane) minorului de ordin r cu elementele corespunzatoare ale uneia dintre liniile și uneia dintre coloanele rămase sunt zero.

Sisteme de ecuații liniare

Forma generală a unui sistem de m ecuații cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} -coeficienții necunoscutelor, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ - necunoscute, $b_1, b_2, \cdots, b_m$ -termenii liberi

$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$ -matricea sistemului, $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n}b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots\ldots a_{mn}b_m \end{pmatrix}$ -matricea extinsă

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ matricea coloană a termenilor liberi, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ .matricea necunoscutelor.

AX=B -forma matriceală a sistemului

Definiție:

- Un sistem se numește incompatibil dacă nu are soluție;
- Un sistem se numește compatibil dacă are cel puțin o soluție;
- Un sistem se numește compatibil determinat dacă are o singură soluție;

- Un sistem se numeşte compatibil nedeterminat dacă are mai mult de o soluţie.

Rezolvarea sistemelor prin metoda lui Cramer:

Un sistem de ecuaţii liniare este de tip Cramer dacă numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute şi determinantul matricei sistemului este nenul.

Teorema lui Cramer: Dacă det A notat $\Delta \neq 0$, atunci sistemul AX=B are o soluţie unică $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$,unde Δ_i se obţine înlocuind coloana i cu coloana termenilor liberi.

Teorema lui Kronecker- Capelli: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

Teorema lui Rouche: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Elemente de geometrie şi trigonometrie

Formule trigonometrice.Proprietăţi.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in R$$

$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in R$

$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in R$

$\sin(x+2k\pi) = \sin x, \forall x \in R, \forall k \in Z$

$\cos(x+2k\pi) = \cos x, \forall x \in R, \forall k \in Z$

sin(a+b)=sinacosb+sinbcosa

cos(a+b)=cosacosb-sinasinb

sin(a-b)=sinacosb-sinbcosb

cos(a-b)=cosacosb+sinasinb

sin2x=2sinxcosx,

cos2x=$\cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

sina+sinb=$2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

cosa+cosb=$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

sina-sinb=$2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$

cosa-cosb= $-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

tgx=$\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$

ctgx=$\frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0$

$tg(x+k\pi) = tgx$

$ctg(x+k\pi) = ctgx$

$tg(\frac{\pi}{2} - x) = ctgx$

$ctg(\frac{\pi}{2} - x) = tgx$

tg(a+b)=$\frac{tga + tgb}{1 - tgatgb}$

tg(a-b)=$\frac{tga - tgb}{1 + tgatgb}$

tg2x=$\frac{2tgx}{1 + tg^2 x}$

sinx =$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$

cosx =$\frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$

Valori principale ale funcţiilor trigonometrice

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Semnele funcţiilor trig.

sin:+,+,-,-

tg.,ctg.:+,-,+,-

cos:+,-,-,+

sin(-x)= -sinx (impară)

cos(-x)=cosx(pară)

tg(-x)= -tgx

ctg(-x)= -ctgx

Funcţii trigonometrice inverse

arcsin:[-1,1]$\to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

arcsin(-x)= -arcsinx

arcsin(sinx)=x, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

sin(arcsinx)=x,x$\in[-1,1]$

arccos:[-1,1]$\to[0,\pi]$

arccos(-x)=$\pi-\arccos x$

arccos(cosx)=x, $\forall x\in[0,\pi]$

cos(arccosx)=x, $\forall x\in[-1,1]$

arcsinx+arccosx=$\frac{\pi}{2}, \forall x\in[-1,1]$

arctg:R$\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

arctg(-x)= -arctgx

arctg(tgx)=x, $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

tg(arctgx)=x, $\forall x\in R$

arcctg:R$\to(0,\pi)$

arcctg(-x)=$\pi - arcctgx$

arcctg(ctgx)=x, $\forall x\in(0,\pi)$

ctg(arcctgx)=x, $\forall x\in R$

arctgx+arcctgx=$\frac{\pi}{2}, \forall x\in R$

Ecuaţii trigonometrice

sinx = a,a$\in[-1,1]\Rightarrow x\in\{(-1)^k \arcsin a+k\pi, k\in Z\}$

cosx = b,b$\in[-1,1]\Rightarrow x\in\{\pm\arccos b+2k\pi, k\in Z\}$

tgx = c,c$\in R\Rightarrow x\in\{arctgc+k\pi, k\in Z\}$

ctgx = d,d$\in R\Rightarrow x\in\{arcctgd+k\pi, k\in Z\}$

sinax = sinbx $\Rightarrow ax=(-1)^k bx+k\pi, k\in Z$

cosax = cosbx $\Rightarrow ax=\pm bx+2k\pi, k\in Z$

tgax = tgbx $\Rightarrow ax=bx+k\pi, k\in Z$

ctgax = ctgbx $\Rightarrow ax=bx+k\pi, k\in Z$

Teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ =2R,unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Teorema cosinusului: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

Aria unui triunghi:

$A_\Delta=\frac{b\cdot h}{2}$ $A_\Delta=\frac{AB\cdot AC\sin(AB,AC)}{2}$ $A_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,p=$\frac{a+b+c}{2}$

$A_{\Delta ABC}=\frac{|\Delta|}{2}, \Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$ $A_{\Delta dreptunghic}=\frac{c_1\cdot c_2}{2}$ $A_{\Delta echilateral}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Raza cercului circumscris unui triunghi: R=$\frac{abc}{4S}$,unde S este aria triunghiului

Raza cercului înscris într-un triunghi: r=$\frac{S}{p}$,unde S este aria triunghiului iar p=$\frac{a+b+c}{2}$

Grupuri

Definiție: Fie $*: M\times M\to M$ lege de compozitie pe M.O submultime nevidă H a lui M ,se numește parte stabilă a lui M în raport cu legea "$*$" dacă $\forall x,y\in H\Rightarrow x*y\in H$.

Proprietățile legilor de compoziție

Fie $*: M\times M\to M$ lege de compoziție pe M.

Legea "$*$" se numește asociativă dacă $(x*y)*z=x*(y*z), \forall x,y,z\in M$

Legea "$*$" se numește comutativă dacă $x*y=y*x, \forall x,y\in M$

Legea "$*$" admite element neutru dacă exista e$\in M$ a.i.$x*e=e*x=x, \forall x\in M$

Definiție: Cuplul (M,$*$) formează un monoid dacă are proprietățile:

1)$(x*y)*z=x*(y*z), \forall x,y,z\in M$

2) există e$\in M$ a.i.$x*e=e*x=x, \forall x\in M$

Dacă în plus $x*y=y*x, \forall x,y\in M$ atunci monoidul se numește comutativ.

Notație: U(M)={x$\in M$ / x este simetrizabil}

Definiție: Cuplul (G,$*$) formează un grup dacă are proprietățile:

1)$(x*y)*z=x*(y*z), \forall x,y,z\in G$

2) există e$\in M$ a.i.$x*e=e*x=x, \forall x\in G$

3) $\forall x\in G, \exists x'\in G$ a.i. $x*x'=x'*x=e$

Dacă în plus $x*y=y*x, \forall x,y\in G$ atunci grupul se numește abelian sau comutativ.

Definiție: Un grup G se numește finit dacă mulțimea G este finită și grup infinit ,în caz contrar. Se numește ordinul grupului G ,cardinalul mulțimii G(numărul de elemente din G).

Ordinul unui element

Definiţie:Fie $(G,\bullet)$ un grup şi $x \in G$.Cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea $x^n = e$ se numeşte ordinul elementului x în grupul G.(ordx = n)

Subgrup

Definiţie:Fie $(G,*)$ un grup.O submulţime nevidă H a lui G se numeşte subgrup al grupului $(G,*)$ dacă îndeplineşte condiţiile:

1) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.
2) $\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$

Grupul claselor de resturi modulo n, $Z_n = \{\hat{1}, \hat{2}, \cdots, \widehat{n-1}\}$

$(Z_n,+)$ – **grup abelian**

$(Z_n,\cdot)$ **-monoid comutativ ,**în care $U(Z_n) = \{\hat{k} \in Z_n / c.m.m.d.c.(k,n) = 1\}$

Morfisme şi izomorfisme de grupuri

Definiţie:Fie $(G,*)$ şi $(G',\circ)$ două grupuri.O funcţie f:G$\to G'$ se numeşte morfism de grupuri dacă are loc conditia f($x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G$

Dacă în plus f este bijectivă atunci f se numeşte izomorfism de grupuri.

Prop. Fie $(G,*)$ şi $(G',\circ)$ două grupuri.Dacă f:G$\to G'$ este morfism de grupuri atunci:

1)f(e)=e$'$ unde e,e$'$ sunt elementele neutre din cele două grupuri.
2)f(x$'$) $= [f(x)]'$ $\forall x \in G$

Inele şi corpuri

Definiţie: Un triplet $(A,*,\circ)$, unde A este o multime nevidă iar „$*$” şi „$\circ$” sunt două legi de compozitie pe A,este inel dacă:

1) (A,$*$)este grup abelian
2) (A,$\circ$)este monoid
3)Legea „$\circ$”este distributivă fata de legea „$*$”:

x$\circ$(y$*$z)=(x$\circ$y)$*$(x$\circ$z),$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x) \forall x, y, z \in A$

Inelul $(A,*,\circ)$, este fără divizori ai lui 0,dacă $\forall x.y \neq e_* \Rightarrow x \circ y \neq e_*$(e_* element neutru de la legea „$*$”)

Un inel $(A,*,\circ)$, se numeşte comutativ dacă satisface şi axioma: x$\circ$ $y = y \circ x, \forall x, y \in A$

Un inel $(A,*,\circ)$, comutativ,cu cel putin 2 elemente şi fără divizori ai lui 0, se numeşte,**domeniu de integritate** .

Definiţie :Un inel $(K,*,\circ)$ cu $e_* \neq e_\circ$ se numeşte corp dacă $\forall x \in K, x \neq e_*, \exists x' \in K$ a.i. $x \circ x' = x' \circ x = e_\circ$ ($e_*, e_\circ$ fiind elementele neutre)

Un corp $(K,*,\circ)$, se numeşte comutativ dacă satisface şi axioma: x$\circ$ $y = y \circ x, \forall x, y \in K$

Obs.:Corpurile nu au divizori ai lui zero.

Morfisme şi izomorfisme de inele şi corpuri.

Definiţie : Fie $(A,*,\circ),(A'\oplus,\otimes)$ două inele.O funcţie f:A$\to A'$ se numeşte morfism de inele dacă :

1)f($x * y) = f(x) \oplus f(y), \forall x, y \in A$

1)f($x \circ y) = f(x) \otimes f(y), \forall x, y \in A$
3)f(e$_{\circ}$)=$e_{\otimes}$ (e$_{\circ}$, $e_{\otimes}$ fiind elementele neutre corespunzătoare legilor $\circ, \otimes$)
Dacă în plus f este bijectivă atunci f se numeşte izomorfism de inele.
Definiţie:Fiind date corpurile K, K' ,orice morfism(izomorfism) de inele de la K la K' ,se numeşte morfism(izomorfism)de corpuri.

Inele de polinoame

Forma algebrică a unui polinom:f = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0, a_i \in A$ un inel comutativ.
Definiţie:a$\in A$ se numeşte rădăcină a polinomului f dacă f(a)=0.
Teorema împărţirii cu rest:Fie K un corp comutativ,iar f şi g,cu g$\neq 0$, *polinoame* din K[X].Atunci există polinoamele q şi r din K[X] ,unic determinate,astfel încât f=gq+r cu gradr<gradg.
Dacă r = 0,adică f = gq ,atunci spunem că polinomul g divide polinomul f.
Teorema restului: Fie K un corp comutativ,f un polinom din K[X] şi a un element din K $\Rightarrow$restul împărţirii lui f la X-a este f(a).
Consecinţă:a este radăcină a lui f $\Leftrightarrow$ X-a divide f.
Definiţie:Elementul a$\in K$ este rădăcină de ordinul p$\in N^*$ pentru polinomul f$\in K[X]$ dacă (X-a)^{p} divide pe f iar (X-a)$^{p+1}$nu divide pe f.
Teoremă: Elementul a$\in K$ este rădăcină de ordinul p$\in N^*$ pentru polinomul f$\in K[X] \Leftrightarrow f(a) = 0, f'(a) = 0, \cdots, f^{(p-1)}(a) = 0$ şi $f^{(p)}(a) \neq 0$,unde f este fucţia polinomială asociată polinomului f.
Polinoame cu coeficienţi reali
Teoremă:Fie f$\in R[X]$,f$\neq 0$.Dacă z = a+ib,b$\neq 0$este o rădăcină complexă a lui f,atunci:
1) $\overline{z}$ = a-ib este de asemenea o rădăcină complexă a lui f
1)z şi $\overline{z}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.
Obs. : $(X - z)(X - \overline{z}) / f$
Polinoame cu coeficienţi raţionali
Teoremă :Fie f$\in Q[X]$, f$\neq 0$.Dacă $x_0 = a + \sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f,unde a,b$\in Q, b \rangle 0, \sqrt{b} \notin Q$,atunci
1) $\overline{x_0} = a - \sqrt{b}$este de asemenea o rădăcină a lui f 2)x_0, $\overline{x_0}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.
Obs. : $(X - x_0)(X - \overline{x_0}) / f$
Polinoame cu coeficienţi întregi
Teoremă :fie f=$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$;f$\in Z[X]$
1)Dacă $x_0 = \dfrac{p}{q}$(p, q numere prime între ele) este o rădăcină raţională a lui f,atunci
a)p divide termenul liber a_0
b)q divide pe a_n
2)Dacă $x_0 = p$ este o rădăcină întreagă a lui f,atunci p este un divizor al lui a_0.

Polinoame ireductibile

Definiţie: Fie K un corp comutativ, f un polinom din K[X] cu gradf>0 se numeşte reductibil peste K dacă există g,q din K[X] cu gradg<gradf, gradq<gradf astfel încât f=gq.

Dacă f nu este reductibil peste K atunci se spune că f este ireductibil peste K.

Prop.: Polinoamele de grad 2 sau 3 din K[X] sunt ireductibile peste K $\Leftrightarrow$ nu au rădăcini în K.

Relaţiile lui Viete: Fie K un corp comutativ, f un polinom din K[X],

f $= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$. Dacă $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sunt n rădăcini ale lui f în K atunci f $= a_n(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)$ şi

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1} \cdot a_n^{-1}$

$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}a_n^{-1}$

....

$x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_0 a_n^{-1}$

Dacă f $= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, f \in C[X] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$

f$= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, f \in C[X] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_3x_4 = \dfrac{a_2}{a_4} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{a_1}{a_4} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{a_0}{a_4} \end{cases}$

Ecuaţii reciproce

Definiţie: O ecuaţie de forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_n \neq 0$ pentru care $a_{n-i} = a_i, 0 \le i \le n$ se numeşte ecuaţie reciprocă de gradul n.

Orice ecuaţie reciprocă de grad impar are rădăcina -1.

Ecuaţia reciprocă de gradul IV are forma: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a, a \neq 0$

Se împarte prin x^2 şi devine $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$; notez $x + \frac{1}{x} = t$ şi obţinem o ecuaţie de gradul II.

Şiruri de numere reale

Şir monoton (crescător sau descrescător)

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale.

Şirul (a_n) este crescător dacă: $a_n \le a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şirul (a_n) este strict crescător dacă: $a_n < a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şirul (a_n) este descrescător dacă: $a_n \ge a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şirul (a_n) este strict descrescător dacă: $a_n > a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şir mărginit

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale.

Şirul (a_n) este mărginit dacă: $\exists \alpha, \beta \in \mathrm{R}$ a.i. $\alpha \le a_n \le \beta, \forall n \in N$

Definiţie

Un şir care are limita finită se numeşte convergent.

Un şir care nu are limită sau care are limita infinită se numeşte divergent

Teoremă :Orice şir convergent este mărginit.

Consecinţă :Dacă un şir este nemărginit atunci el este divergent.

Teoremă Dacă un şir are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită.

Consecintă: dacă un şir conţine două subşiruri cu limite diferite, atunci şirul nu are limită.

▪**Teorema lui Weierstrass**

Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

▪**Teorema cleştelui**

Dacă $x_n \le a_n \le y_n, \forall n \ge k$ si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

▪ **Criteriul raportului**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,1)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Daca $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in (1,\infty)$ sau $l = \infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

▪ **Lema lui Stolz-Cezaro**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ şi $(b_n)_{n\in N}$ două şiruri de numere reale.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ (finit sau infinit) şi $(b_n)_{n\in N}$ este strict monoton şi nemărginit ,

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

▪ **Criteriul radicalului**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir cu termeni strict pozitivi.Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Şiruri remarcabile

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{dacă } q \in (-1,1) \\ 1, dacă\ q = 1 \\ \infty, dacă\ q \in (1,\infty) \\ nu\ există, dacă\ q \in (-\infty,-1] \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} \infty, \alpha \rangle 0 \\ 0, \alpha \langle 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$,unde $a \in (-1,1), k \in N$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; $e = 2{,}7178...$este constanta lui Euler

generalizare: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ dacă $x_n \to \pm\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty}(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$ dacă $y_n \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{arc\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$,

Limite de functii

Teoremă: O funcţie are limită într-un punct finit de acumulare dacă şi numai dacă are limite laterale egale în acel punct.

f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$

Obs.:Funcţia f :D $\to R$ nu are limită în punctul de acumulare x_0 în una din situaţiile :

a)există un şir $x_n \in D-\{x_0\}$ cu limita x_0 astfel încât şirul $(f(x_n))$ nu are limită

b)există şirurile $(x_n),(y_n), x_n, y_n \in D-\{x_0\}$,astfel încât şirurile $(f(x_n)),(f(y_n))$ au limite diferite.

Teoremă: Fie f :D $\to R$,o funcţie elementară şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui D$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teoremă(Criteriul majorării,cazul limitelor finite)

Fie f,g:D $\to R$ şi x_0 un punct de acumulare al lui D.Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ şi există $l \in R$ a.î. $|f(x) - l| \le g(x), \forall x \in D \cap V, x \ne x_0$, V vecinătate a lui x_0 şi dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Teoremă(Criteriul majorării,cazul limitelor infinite)

Fie f,g:D $\to R$, x_0 un punct de acumulare al lui D şi $f(x) \le g(x), \forall x \in D \cap V, x \ne x_0$,V vecinătate a lui x_0.

a)Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

b)Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

Teoremă(Criteriul cleştelui)

Fie f,g,h:D $\to R$, x_0 un punct de acumulare al lui D şi

$f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x \in D \cap V, x \ne x_0$, V vecinătate a lui x_0.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$

Limite uzuale.Limite remarcabile.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m}, k = m \\ 0, m\rangle k \\ \frac{a_k}{b_m}\cdot(\pm\infty)^{k-m}, k\rangle m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x} = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases}\infty, \text{ daca } a > 1\\ 0, \text{ daca } a\in(0,1)\end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases}0, \text{ daca } a > 1\\ \infty, \text{ daca } a\in(0,1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log_a x = \begin{cases}\infty, \text{ daca } a > 1\\ -\infty, \text{ daca } a\in(0,1)\end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_a x = \begin{cases}-\infty, \text{ daca } a > 1\\ \infty, \text{ daca } a\in(0,1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to\infty} arcctgx = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ ,\ a > 0, a\neq 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a \ ,\ a > 0, a\neq 1 \text{ unde } \lim_{x\to x_0} u(x) = 0$$

Operaţii fără sens: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

Funcţii continue

Definiţie Fie $f : D \to R$ şi $x_0 \in \mathrm{D}$ punct de acumulare pentru D

f este continuă în $x_0 \in \mathrm{D}$ dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dacă f nu este continuă în $x_0 \in \mathrm{D}$,ea se numeşte discontinuă în x_0 ,iar x_0 se numeşte punct de discontinuitate.

Definiţii: Un punct de discontinuitate $x_0 \in \mathrm{D}$ este punct de discontinuitate de prima speţă pentru f ,dacă limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0 există şi sunt finite.

Un punct de discontinuitate $x_0 \in$ D este punct de discontinuitate de speţa a doua dacă nu este de prima speţă.(cel puţin una din limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0 nu este finită sau nu există)

Teoremă: Fie $f : D \to R$ şi $x_0 \in$ D punct de acumulare pentru D$\Rightarrow$f continuă în x_0 $\Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) =$ f(x_0)

Teoremă:Funcţiile elementare sunt continue pe domeniile maxime de definiţie.

Operaţii cu funcţii continue

Teoremă:Fie f,g:D$\to R$ continue pe D

$\Rightarrow$f+g, $f \cdot g, \frac{f}{g}(g \neq 0), |f|, \max(f, g), \min(f, g)$ sunt funcţii continue pe D.

Compunerea a două funcţii continue este o funcţie continuă.

Teoremă: Fie f:[a,b]$\to$R o funcţie continuă a.î. f(a)f(b)<0 $\Rightarrow \exists\ c \in (a, b)$ pentru care f(c)=0.

Asimptote

1.Asimptote verticale

Definiţie: Fie f :E$\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la stanga pentru f,dacă $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$.

Definiţie: Fie f :E$\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la dreapta pentru f,dacă $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$.

Definiţie : Fie f :E$\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală pentru f dacă ea este asimptotă verticală atât la stânga cât şi la dreapta sau numai lateral.

2.Asimptote oblice

Teorema : Fie f :E$\to R$,unde E conţine un interval de forma(a,∞)

Dreapta y=mx+n,m$\neq 0$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f dacă şi numai dacă m,n sunt numere reale finite,unde m=$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim\limits_{x \to \infty}[f(x) - mx]$.Analog la -$\infty$.

3.Asimptote orizontale

Dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l, l$ număr finit atunci y = l este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f.

Analog la -∞

Obs :O funcţie nu poate admite atât asimptotă orizontala cât şi oblică spre $+\infty$(-∞)

Funcţii derivabile

Definiţie:Fie f:D$\to R$,$x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D

Derivata într-un punct:$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

f este derivabilă în x_0 dacă limita precedentă există şi este finită.

▪Dacă f este derivabilă în x_0, graficul funcţiei are în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ tangentă a cărei pantă este $f'(x_0)$.Ecuaţia tangentei este: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Teoremă: Fie f:D→R **,** $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D⇒f este derivabilă în punctul de acumulare $x_0 \Leftrightarrow f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in \mathrm{R}(\text{finite}) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \langle x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \rangle x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$.

Teoremă . Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Puncte de întoarcere.Puncte unghiulare.

Definiţii: Fie f:D→R **,** $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D.Punctul x_0 se numeşte punct de întoarcere al funcţiei f, dacă f este continuă în x_0 şi are derivate laterale infinite şi diferite în acest punct. Punctul x_0 se numeşte punct unghiular al funcţiei f dacă f este continuă în x_0,are derivate laterale diferite în x_0 şi cel puţin o derivată laterală este finită.

Derivatele funcţiilor elementare

Functia	**Derivata**
c	0
x	1
$x^n, n \in \mathbf{N}^*$	nx^{n-1}
$x^r, r \in \mathbf{R}$	rx^{r-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Operaţii cu funcţii derivabile

Teoremă: Fie f,g:D$\to R$ derivabile pe D$\Rightarrow$f+g ,fg, $\frac{f}{g}$($g\neq 0$)sunt funcţii derivabile pe D.

Compunerea a două funcţii derivabile este o funcţie derivabilă.

Reguli de derivare

$$(f\pm g)'=f'\pm g';(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'\ ;(\lambda\cdot f)'=\lambda\cdot f'\ ;\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

$$(f\circ u)'=f'(u)\cdot u'$$

Proprietăţile funcţiilor derivabile

Definiţie:Fie f:D$\to$R.Un punct $x_0\in D$ se numeşte punct de maxim local(respectiv de minim local)al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $f(x)\leq f(x_0)$(respectiv $f(x)\geq f(x_0)$) pentru orice $x\in D\cap U$.

Dacă $f(x)\leq f(x_0)$(respectiv $f(x)\geq f(x_0)$) pentru orice $x\in D$ atunci x_0 se numeşte punct de maxim absolut(respectiv minim absolut)

Teoremă . (Fermat) Fie I un interval deschis şi $x_0\in$I un punct de extrem al unei funcţii f: I$\to$R. Dacă f este derivabilă în punctul x_0 atunci $f'(x_0)=0$.

Definiţie:O funcţie f: [a, b] $\to$R (a< b) se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact [a, b] şi derivabilă pe intervalul deschis (a, b).

Teorema lui Rolle

Fie f: [a, b]$\to$ R, a< b o funcţie Rolle astfel încât f(a)= f(b), atunci există cel puţin un punct c$\in$ (a, b) astfel încât f'(c)=0.

Teorema(teorema lui J. Lagrange). Fie f o funcţie Rolle pe un interval compact [a, b]. Atunci $\exists$ c$\in$ (a, b) astfel încât f(b)- f(a)= (b- a)f'(c)

Consecinţe:

1.Dacă o funcţie derivabilă are derivata nulă pe un interval atunci ea este constantă pe acel interval.

2.Dacă două funcţii derivabile au derivatele egale pe un interval atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

Rolul primei derivate

3. Fie f o funcţie derivabilă pe un interval I.

Dacă $f'(x)>0(f'(x)\geq 0),\forall x\in \mathrm{I}$, atunci f este strict crescătoare(crescătoare) pe I.

Dacă $f'(x)<0(f'(x)\leq 0),\forall x\in \mathrm{I}$, atunci f este strict descrescătoare(descrescătoare) pe I.

4.Fie f:D$\to R$,D interval şi $x_0\in D$.Dacă

1)f este continuă în x_0

2)f este derivabilă pe D-$\{x_0\}$

3)există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{R}$

atunci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$ .Dacă $l \in R$ atunci f este derivabilă în x_0.

Observaţie: Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcţii derivabile şi se determină punctele de extrem local.

Rolul derivatei a doua

Teoremă: Fie *f* o funcţie de două ori derivabilă pe I.

Dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este convexă pe I.

Dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este concavă pe I.

Definiţie: Fie *f* o funcţie continuă pe I si $x_0 \in \mathbf{I}$ punct interior intervalului. Spunem că x_0 este punct de inflexiune al graficului funcţiei dacă *f* este convexă pe o vecinătate stânga a lui x_0 şi concavă pe o vecinătate dreapta a lui x_0 sau invers.

Observaţie:Cu ajutorul derivatei a doua se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi se determină punctele de inflexiune.

Noţiunea de primitivă

Definiţie: Fie I $\subseteq$ R interval, f : I $\to$ R. Se numeşte primitivă a funcţiei f pe I, orice funcţie F : I $\to$ **R** derivabilă pe I cu proprietatea $F'(x) = f(x), \forall x \in$ I.

Teoremă.Orice funcţie continuă f : I $\to$ R posedă primitive pe I.

Teoremă:Fie f : I $\to$ R,I interval ,o funcţie care admite primitive pe I.Atunci f are proprietatea lui Darboux.

Consecinţe:

1.Dacă g : I $\to$ R nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul I,atunci g nu admite primitive pe I.

2.Fie g : I $\to$ R.Dacă g(I)=$\{g(x) / x \in I\}$ nu este interval atunci g nu admite primitive pe I.

3.Dacă g : I $\to$ R are discontinuităţi de prima speţă atunci g nu admite primitive pe I.

Tabel de integrale nedefinite

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$,n$\in N$,x$\in R$

$\int x^a = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$,a$\in R, a \neq -1$,x$\in (0,\infty)$

$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \in (0,\infty)$ sau x$\in (-\infty,0)$

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, a \rangle 0, a \neq 1, x \in R$

$\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0, x \in (-\infty,-a)$ sau x$\in (-a,a)$ sau x$\in (a,\infty)$

$\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C, a \neq 0, x \in R$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, a \neq 0, x \in (-a, a)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, a \neq 0, x \in R$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, a \neq 0, x \in (-\infty, -a) \text{ sau } x \in (a, \infty)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, x \in R$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, x \in R$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C, \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C, \sin x \neq 0$$

Integrala definită

Teoremă. Funcţiile continue pe un interval $[a,b]$ sunt integrabile pe $[a,b]$.

Teoremă. Funcţiile monotone pe un interval $[a,b]$ sunt integrabile pe $[a,b]$.

Proprietăţile funcţiilor integrabile.

a)**(Proprietatea de linearitate)**

Dacă f,g $: [a.b] \to R$ sunt integrabile şi $\lambda \in R \Rightarrow$

1) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

b)Dacă $f(x) \geq 0, x \in [a,b]$ şi este integrabilă pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

c)Dacă $f(x) \geq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$ şi dacă f şi g sunt integrabile pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

d)**(Proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul)**

Funcţia f : [a, b]→ **R** este integrabilă pe [a, b] dacă şi numai dacă, ∀ c ∈ (a, b) funcţiile $f_1 = f|[a,c]$ şi $f_2 = f|[c,b]$ sunt integrabile şi are loc formula:

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

e)Dacă funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$, atunci şi $|f|$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x .$$

Teoremă (Formula Leibniz - Newton)
Dacă f : [a, b]→ **R** este o funcţie integrabilă şi f admite primitive pe [a, b] atunci pentru orice primitivă F a lui f pe [a, b] are loc formula Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Teorema de medie Dacă f : [a, b] → **R** este o funcţie continuă, atunci există c∈[a, b] a.i.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(c).$$

Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue
Dacă g : [a, b]→ R este o funcţie continuă,atunci funcţia G**:** [a, b]→R,

$G(x) = \int_a^x g(t)dt, x \in [a,b]$ are proprietăţile**:**

1)G este continuă pe [a, b] şi G(a) = 0
2)G este derivabilă pe [a, b] şi $G'(x) = g(x), \forall x \in [a,b]$

Reţinem: $\left(\int_a^x g(t)dt\right)' = g(x)$

Teoremă (Formula de integrare prin părţi)
Fie f , g : [a, b]→ **R** cu f , g derivabile cu derivatele continue, atunci are loc **formula de integrare prin părţi**: $\int_a^b fg'dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'gdx$.

Teoremă:Fie f:[-a,a] → R**,** $a \rangle 0$ o funcţie continuă.Atunci

1) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, dacă f este funcţie pară.

2) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$,dacă f este funcţie impară.

Teoremă:Fie f:R→ R o funcţie continuă de perioadă

T $\rangle 0 \Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \forall a \in R$

Aria unui domeniu din plan

1**. Aria mulţimii** din plan D⊂ $\mathbf{R}^2$ mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$, $y = 0$ şi graficul funcţiei f : [a, b]→ R pozitivă şi continuă se calculează prin formula: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x)dx$.

2. În cazul f : [a, b]→ R continuă şi de semn oarecare, avem: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)|dx$.

3. **Aria mulţimii** din plan mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$ şi graficele funcţiilor f, g : [a, b]→ R continue este calculată prin formula: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx$.

Volumul unui corp de rotaţie Fie $f : [a, b]\to \mathbf{R}$ o funcţie continuă, atunci corpul C_f din spaţiu obţinut prin rotirea graficului lui f, G_f, în jurul axei Ox, are volumul calculat prin formula: .$V(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$