

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 2**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**ZAVDANNIA I**

**(30 балів)**

- 56 1. Знайдіть третій член геометричної прогресії  $(b_n)_{n \geq 1}$ , знаючи, що  $b_1 = 2$  і  $b_2 = 6$ .
- 56 2. Розглядають функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 7$  і  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x - 7$ . Обчисліть  $(f \circ g)(7)$ .
- 56 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння  $\sqrt{2x-1} = x - 2$ .
- 56 4. Обчисліть ймовірність того, що вибираючи число  $n$  з множини одноцифрових натуральних чисел, перевірятиме нерівність  $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) > 0$ .
- 56 5. У декартовому репері  $xOy$  розглядають точки  $A(1,1)$ ,  $B(-1,0)$ ,  $C(3,5)$  і  $D(5,6)$ . Докажіть, що точки  $B$ ,  $D$  і середина відрізка  $AC$  є колінеарними.
- 56 6. Знайдіть  $x \in (0, \pi)$  знаючи, що  $(\sin x - \cos x)^2 = 2$ .

**ЗAVDANNIA II**

**(30 балів)**

1. Розглядають матриці  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  і  $A(a) = \begin{pmatrix} 1+2^a & 2^a \\ -2^a & 1-2^a \end{pmatrix}$ , де  $a$  - дійсне число.
- 56 а) Докажіть, що  $\det(A(0)) = 1$ .
- 56 б) Докажіть, що  $A(1) + A(2) - A(1) \cdot A(2) = I_2$ .
- 56 в) Розглядають натуральні числа  $m$  і  $n$ , так щоб  $A(m) \cdot A(n) = A(m+n)$ . Докажіть, що  $m = n = 1$ .
2. На множині дійсних чисел задають закон композиції  $x * y = x^2 + y^2 + x + y$ .
- 56 а) Докажіть, що  $(-1) * (-1) = 0$ .
- 56 б) Докажіть, що  $x * y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ , для будь-яких дійсних чисел  $x$  та  $y$ .
- 56 в) Знайдіть множину дійсних чисел  $x$  для яких  $x^2 * x^2 \leq 4$ .

**ЗAVDANNIA III**

**(30 балів)**

1. Розглядають функцію  $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 4x - \frac{1}{2} \ln(x+2)$ .
- 56 а) Докажіть, що  $f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$ ,  $x \in (-2, +\infty)$ .
- 56 б) Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - f(x)}{x}$ .
- 56 в) Докажіть, що  $x^2 + 4x + \frac{15}{4} \geq \frac{1}{2} \ln(2x+4)$ , для будь-якого  $x \in (-2, +\infty)$ .
2. Розглядають функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$ .
- 56 а) Докажіть, що  $\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = 18$ .
- 56 б) Докажіть, що  $\int_1^3 x f(x) dx = 4 + \ln 5$ .
- 56 в) Докажіть, що  $F(x+1) \geq F(x) + 1$ , для будь-якого дійсного числа  $x$ , де  $F$  первісна для  $f$ .