Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. Thema (30 Punkte)

5p **1.** Zeige, dass $(1+i)^2-2(1+i)+2=0$, wo $i^2=-1$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-5$, wobei a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl a, wenn der Punkt $M(1,2)$ zum Schaubild der Funktion f gehört.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_4\left(x^2+1\right)=\log_4 x+\log_4(x+1)$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte natürliche zweistellige Zahl teilbar durch 2 und durch 5 ist.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $M(3,4)$, $N(0,1)$ und $P(3,0)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Bestimme die Gleichung der Geraden d, die durch den Punkt P geht und zur Geraden MN parallel ist.

5p **6.** Gegeben ist das Dreieck ABC, rechtwinklig in C. Zeige, dass $\operatorname{tg} B=\dfrac{1}{\operatorname{tg} A}$.

II. Thema (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ und $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, wobei a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Bestimme die Matrix $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ so, dass $aB=A(a)-2I_3$, für jede reelle Zahl a.

5p **c)** Bestimme die natürliche Zahl n so, dass $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

2. In der Menge der reellen Zahlen definiert man die assoziative Verknüpfung $x*y=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

5p **a)** Zeige, dass $2*0=2$.

5p **b)** Beweise: wenn a und b reelle Zahlen sind so, dass $a\le b$, dann $a*b=b$.

5p **c)** Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $(2x)*\left(x^2+1\right)*(-2x)=10$.

III. Thema (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f.

5p **c)** Bestimme die Menge von reellen Zahlen a so, dass die Gleichung $f(x)=a$ Lösung hat.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+3}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^2 (x^2+x+3) f(x)\,dx = 2$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_1^2 g(x)\,dx = \ln\dfrac{9}{5}$, wobei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.

5p **c)** Gegeben sind die reellen Zahlen a und b, mit $0\le a<b$. Gegeben ist die Zahl $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$ für jede von Null verschiedene natürliche Zahl n. Beweise, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.