

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2 =$ $= 1 - 1 = 0$	3p 2p
2.	$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a - 5 = 2$ $a = 6$	3p 2p
3.	$\log_4(x^2 + 1) = \log_4(x(x+1))$, deci $x^2 + 1 = x^2 + x$ $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 2 și cu 5, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$m_{MN} = 1$ și, cum dreptele sunt paralele, obținem $m_d = 1$ $P \in d$, deci ecuația dreptei d este $y - y_P = m_d(x - x_P)$, adică $y = x - 3$	3p 2p
6.	$\text{tg } A = \frac{BC}{AC}$ $\text{tg } B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{1}{\text{tg } A}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8$	2p 3p
b)	$A(a) - 2I_3 = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ 3a & 0 & 2-3a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 3a & 0 & -3a \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $aB = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a , deci $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$A(n) \cdot A(-n) = \begin{pmatrix} 4+2n^2 & 0 & -2n^2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6n^2 & 0 & 4-6n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(n) \cdot A(-n)) = 64(1-n^2)$, unde n este număr natural $64(1-n^2) > 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 0$	3p 2p

2.a)	$2 * 0 = \frac{1}{2}(2 + 0 + 2 - 0) =$	3p
	$= \frac{1}{2}(2 + 2) = 2$	2p
b)	$a \leq b \Rightarrow a - b = b - a$	2p
	$a * b = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = \frac{1}{2}(a + b + b - a) = \frac{1}{2} \cdot 2b = b$, pentru orice numere reale a și b astfel încât $a \leq b$	3p
c)	$x^2 + 1 \geq 2x$ și $x^2 + 1 \geq -2x$, pentru orice număr real x , deci $((2x) * (x^2 + 1)) * (-2x) =$	3p
	$= (x^2 + 1) * (-2x) = (-2x) * (x^2 + 1) = x^2 + 1$, pentru orice număr real x $x^2 + 1 = 10$, deci $x = -3$ sau $x = 3$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} =$	3p
	$= 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 3)}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice număr real x , deci f este strict crescătoare	2p
	Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și f este funcție continuă, ecuația $f(x) = a$ are soluție $\Leftrightarrow a \in (-\infty, 0)$	3p
2.a)	$\int_0^2 (x^2 + x + 3) f(x) dx = \int_0^2 (x^2 + x + 3) \frac{x}{x^2 + x + 3} dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 =$	3p
	$= \frac{4}{2} = 2$	2p
b)	$\int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3} dx = \int_1^2 \frac{(x^2 + x + 3)'}{x^2 + x + 3} dx =$	3p
	$= \ln(x^2 + x + 3) \Big _1^2 = \ln 9 - \ln 5 = \ln \frac{9}{5}$	2p
c)	$0 \leq \frac{x}{x^2 + x + 3} \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci $0 \leq f^n(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ și orice număr natural nenul n	2p
	$0 \leq I_n = \int_a^b f^n(x) dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, obținem că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	3p