

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este egală cu 30. Determinați a_2 .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Arătați că $(f \circ f)(3) = 9$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-6) = 6 - \log_2(x+6)$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul D mijlocul laturii AC și punctul E mijlocul segmentului BD . Arătați că $\overline{CE} = \frac{1}{4}\overline{CA} - \frac{1}{2}\overline{BC}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 2\sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{4}$ și $B = \frac{5\pi}{12}$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + 2y + z = 4 \\ ax + 4y + z = 6 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 0$.
- 5p b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e = \frac{3}{2}$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x} * x * \frac{1}{x} = x * \frac{1}{x} * x$.
- 5p c) Arătați că **nu** există numere întregi x și y , astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 8 \ln x + 12 - 8 \ln 2$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-2)^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3, 3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f .

- 5p** c) Se consideră numerele reale a , b și c astfel încât punctul $M(a, b)$ este situat pe graficul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 8\ln 2 + 8\ln x$ și punctul $N(a, c)$ este situat pe graficul funcției $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 8x - 12$. Demonstrați că $b \geq c$, pentru orice $a \in [2, +\infty)$.
- 2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 4) f(x) dx = -\frac{11}{3}$.
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty, 0]$.
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural n , se consideră $I_n = \int_1^2 x^n f(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\infty$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 2a_2 = a_1 + a_3$ $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 \Leftrightarrow 30 = 3a_2 \Leftrightarrow a_2 = 10$	3p 2p
2.	$f(3) = 0$ $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(0) = 9$	2p 3p
3.	$(x-6)(x+6) = 2^6 \Rightarrow x^2 - 36 = 64 \Rightarrow x^2 - 100 = 0$ $x = -10$, care nu convine; $x = 10$, care convine	3p 2p
4.	Cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în 5 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $5 \cdot 5 = 25$ de numere	2p 3p
5.	$\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{CB}$ Cum $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CA}$, obținem $\overline{CE} = \frac{1}{4}\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{4}\overline{CA} - \frac{1}{2}\overline{BC}$	3p 2p
6.	$C = \pi - (A + B) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = 2$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 4 + (-1) + 2 - 4 - (-1) - 2 = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = 2(a^2 - 1)$, pentru orice număr real a $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, deci matricea $A(a)$ are rangul 2 $\Leftrightarrow \det(A(a)) = 0$, de unde obținem $a = -1$ sau $a = 1$	2p 3p
c)	Sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) , deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2}{a+1}, 1, \frac{2}{a+1}\right)$ $\left(\frac{2}{a+1}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2}{a+1}\right)^2 = 3$ și, cum $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, obținem $a = -3$	3p 2p

2.a)	$x * y = xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$	2p
	$= x\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	3p
b)	$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x} - x\right) = 0$	1p
	$\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = 2$	1p
	$x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$	1p
	$\frac{1}{x} - x = 0 \Rightarrow x = -1$ sau $x = 1$	2p
c)	Presupunem că există x și y numere întregi, astfel încât x să fie simetricul lui y , deci $x * y = e$, de unde obținem $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	2p
	$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow (2x - 1)(2y - 1) = 4$, ceea ce nu convine, deoarece x și y sunt numere întregi și 4 este număr par	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2x - 8 + \frac{8}{x} =$	3p
	$= \frac{2x^2 - 8x + 8}{x} = \frac{2(x-2)^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	2p
b)	Dreapta este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, deci are panta egală cu $f'(2)$	2p
	Cum $f'(2) = 0$, ecuația dreptei este $y = 3$	3p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, +\infty)$ și, cum $f(2) = 0$, obținem $f(a) \geq 0$, pentru orice $a \in [2, +\infty)$	2p
	$f(a) \geq 0 \Rightarrow g(a) \geq h(a) \Rightarrow b \geq c$, pentru orice $a \in [2, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 4)f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{3} - 4 = -\frac{11}{3}$	2p
b)	$F'(x) = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, $F''(x) = f'(x) = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, unde F este o primitivă a lui f	3p
	$F''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, deci funcția F este concavă pe $(-\infty, 0]$	2p
c)	$x \in [1, 2] \Rightarrow x^n(x^2 - 4) \leq 0$ și $\frac{1}{x^2 + 4} \geq \frac{1}{8}$, deci $x^n f(x) \leq \frac{1}{8} x^n (x^2 - 4)$	2p
	$I_n \leq \int_1^2 \frac{1}{8} x^n (x^2 - 4) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{x^{n+3}}{n+3} - \frac{4x^{n+1}}{n+1}\right) \Big _1^2 = \frac{1}{8} \left(-\frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)} - \frac{1}{n+3} + \frac{4}{n+1}\right)$	2p
	Cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)} = +\infty$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\infty$	1p