

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$. Arătați că $f(-2) + f(2) = 4f(0)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8(x^2 - 27) = \log_8(x - 3)^2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$, acesta să fie număr par.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 3)$ și $B(8, 3)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că punctul B este mijlocul segmentului AC .
- 5p 6. Arătați că $\cos^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ - 2 \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det M = 3$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $A(a) \cdot A(a) = 4A(a) - I_2$.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care $\det(aA(a) + M) = 0$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + mX + 2$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(2) = 2m - 6$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr real m , numărul $E = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2$ este întreg, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p c) Pentru $m = 3$, determinați rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + x + 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = (3x - 1)(7x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)}$.
- 5p c) Demonstrați că $f(x) \leq \frac{52}{49}$, pentru orice $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x - 2, & x \in (-\infty, 0] \\ x - 2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 f(x) dx = -\frac{1}{2}$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .
- 5p c) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 0$ are aria egală cu $\frac{17}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{12-4+3}{12} : \frac{11}{12} =$	3p
	$= \frac{11}{12} \cdot \frac{12}{11} = 1$	2p
2.	$f(-2) + f(2) = 8 + 8 =$	2p
	$= 16 = 4 \cdot 4 = 4f(0)$	3p
3.	$x^2 - 27 = (x-3)^2 \Rightarrow 6x - 36 = 0$	3p
	$x = 6$, care convine	2p
4.	Mulțimea M are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	2p
	În mulțimea M sunt 5 numere pare, deci sunt 5 cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	1p
5.	$8 = \frac{4 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 12$	3p
	$3 = \frac{3 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 3$	2p
6.	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2p
	$\cos^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ - 2\cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = (\cos 30^\circ - \sin 60^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 =$	3p
	$= 4 - 1 = 3$	2p
b)	$A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} a^2 + 3 & a + 2 \\ 3a + 6 & 7 \end{pmatrix}$	2p
	$4A(a) - I_2 = \begin{pmatrix} 4a - 1 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} a^2 + 3 & a + 2 \\ 3a + 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a - 1 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = 2$	3p
c)	$aA(a) + M = \begin{pmatrix} a^2 + 2 & a + 1 \\ 3a + 1 & 2a + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(aA(a) + M) = (a + 1)(2a^2 - 3a + 3)$	3p
	Cum $2a^2 - 3a + 3 \neq 0$, pentru orice număr real a , obținem $a = -1$	2p

2.a)	$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + m \cdot 2 + 2 =$ $= 8 - 16 + 2m + 2 = 2m - 6$, pentru orice număr real m	3p 2p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $x_1 x_2 x_3 = -2$ Pentru orice număr real m , $E = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = -8$, care este număr întreg	2p 3p
c)	$f = X^3 - 4X^2 + 3X + 2 = (X - 2)(X^2 - 2X - 1)$ $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 7 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 1 =$ $= 21x^2 - 10x + 1 = (3x - 1)(7x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3x-1)(7x-1)}{7x^3 - 5x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{1}{x}\right) \left(7 - \frac{1}{x}\right)}{x^3 \left(7 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(3 - \frac{1}{x}\right) \left(7 - \frac{1}{x}\right)}{7 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 3$	2p 3p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left(-\infty, \frac{1}{7}\right] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left(-\infty, \frac{1}{7}\right]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right]$ Cum $f(x) \leq f\left(\frac{1}{7}\right)$, pentru orice $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ și $f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{52}{49}$, obținem $f(x) \leq \frac{52}{49}$, pentru orice $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$	2p 3p
2.a)	$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x-2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \Big _1^2 =$ $= (2-4) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{1}{2}$	3p 2p
b)	Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x^2 + 8x - 2) = -2$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 2) = -2$ și $f(0) = -2$, obținem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, deci funcția f este continuă în $x = 0$ Cum funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$, obținem că f este continuă pe \mathbb{R} , deci funcția f admite primitive pe \mathbb{R}	3p 2p
c)	$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2 + 8x - 2 dx = \int_{-1}^0 (-x^2 - 8x + 2) dx =$ $= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 2x\right) \Big _{-1}^0 = \frac{17}{3}$	2p 3p