Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(1+i)^2-2i=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numărul real nenul m, știind că abscisa vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+8x-7$ este egală cu 12.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2-10x+40\right)=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie număr impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-2,0)$ și $C(0,3)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Arătați că $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=\sqrt{3}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=5$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5x+5y-xy-20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.

5p **c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+6x+9}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $0\leq(x+3)(y+3)\leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+1)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că funcția $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a^2$ are aria egală cu $\ln 5$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2-2i=1+2i+i^2-2i=$	**3p**
	$=1+(-1)=0$	**2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}\Rightarrow-\frac{8}{2m}=12$	**3p**
	$m=-\frac{1}{3}$	**2p**
3.	$x^2-10x+40=4^2\Rightarrow x^2-10x+24=0$	**3p**
	$x=4$ sau $x=6$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea M sunt 50 de numere impare, deci sunt 50 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{BA}=4\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+3\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=6\vec{i}+2\vec{j}$	**2p**
	$BD=2\sqrt{10}$	**3p**
6.	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$	**2p**
	$\sin\pi+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=0+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(1))=\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot4-3\cdot1=$	**3p**
	$=8-3=5$	**2p**
b)	$M(a)M(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA\cdot A$	**2p**
	Cum $A\cdot A=\begin{pmatrix}4&4\\12&12\end{pmatrix}=4A$, obținem $M(a)M(b)=I_2+(a+b+4ab)A=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	$M\left(a+a+4a^2\right)=M(2)\Leftrightarrow4a^2+2a-2=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$x*y=-xy+5x+5y-25+5=$	**3p**
	$=-x(y-5)+5(y-5)+5=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$-(x-5)^2+5\geq x\Leftrightarrow(x-5)(x-4)\leq0$	**3p**
	$x\in[4,5]$	**2p**

c)	$x*5=x$ și $5*x=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1*(-2)*3*(-4)*5*\ldots*(-2018)*2019=\left(\left(1*(-2)*3*(-4)\right)*5\right)*(-6)*\ldots*(-2018)*2019=$ $=5*\left((-6)*\ldots*(-2018)*2019\right)=5$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+6)e^x-\left(x^2+6x+9\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2-4x-3}{e^x}=\dfrac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+6x+9}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+6}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,-1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-3,-1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$ și, cum $f(-1)=4e$, obținem $f(x)\leq 4e$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$	**3p**
	$0\leq x+3\leq 2e^{\frac{x+1}{2}}$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$ și $0\leq y+3\leq 2e^{\frac{y+1}{2}}$, pentru orice $y\in[-3,+\infty)$, deci $0\leq(x+3)(y+3)\leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^2(x+1)f(x)dx=\int\limits_0^2 x^3dx=\left.\dfrac{x^4}{4}\right\|_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{16}{4}-0=4$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)'=\dfrac{3x^2}{3}-\dfrac{2x}{2}+1-\dfrac{1}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^3+x^2-x^2-x+x+1-1}{x+1}=\dfrac{x^3}{x+1}=f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
c)	$g(x)=\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow\mathcal{A}=\int\limits_1^{a^2}\left\|g(x)\right\|dx=\int\limits_1^{a^2}\dfrac{1}{x+1}dx=\left.\ln(x+1)\right\|_1^{a^2}=\ln\left(a^2+1\right)-\ln 2$	**3p**
	$\ln\left(a^2+1\right)=\ln 10\Leftrightarrow a^2-9=0$ și, cum $a>1$, obținem $a=3$	**2p**