

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați modulul numărului complex  $z = (2 - i)(3 + 2i) - 4(1 + i)$ .
- 5p 2. Determinați valorile reale ale lui  $m$  pentru care  $x^2 - (2m + 1)x + m(m - 1) \geq 0$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2 \log_2 x - \log_x 2 = 1$ .
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi  $A$ , știind că mulțimea  $A$  are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.
- 5p 5. Se consideră triunghiul  $ABC$ , punctul  $M$  mijlocul laturii  $BC$  și punctul  $N$  mijlocul segmentului  $AM$ . Demonstrați că  $2\overline{AN} + \overline{BN} + \overline{CN} = \vec{0}$ .
- 5p 6. Determinați  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , știind că  $1 + 3 \cos x = \cos 2x$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 4z = 3 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(a)) = a(3 - a)$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p b) Pentru  $a = 0$ , demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil.
- 5p c) Determinați numerele întregi  $a$  pentru care sistemul de ecuații are soluție unică  $(x_0, y_0, z_0)$  și  $x_0, y_0$  și  $z_0$  sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 + x^2 + y^2}$ .
- 5p a) Demonstrați că  $x \circ y = \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} - 1$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p b) Determinați perechile de numere naturale  $a$  și  $b$ , știind că  $a \circ b = 1$ .
- 5p c) Demonstrați că pentru orice număr natural  $n, n \geq 2$ , numărul  $\underbrace{1 \circ 1 \circ \dots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}}$  nu este natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}, x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Determinați imaginea funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln(x+1)$ .

5p a) Calculați  $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)} dx$ .

5p b) Arătați că  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}$ .

5p c) Calculați  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^3} \int_0^t f(x) dx$ .

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = 6 - 3i + 4i - 2i^2 - 4 - 4i = 4 - 3i$ $ z  = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$	3p 2p
2.	$\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m-1) = 8m+1$ $\Delta \leq 0$ , deci $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right]$	2p 3p
3.	$2\log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} = 1 \Rightarrow (2\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) = 0$ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $x = 2$ , care convin	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu cel mult două elemente ale mulțimii $A$ este $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2$ , unde $n$ este numărul de elemente ale mulțimii $A$ $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 16$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n = 5$	3p 2p
5.	$M$ mijlocul laturii $BC \Rightarrow \overline{BN} + \overline{CN} = \overline{MN}$ $N$ mijlocul segmentului $AM$ , deci $\overline{MN} = \overline{NA}$ , deci $2\overline{AN} + \overline{BN} + \overline{CN} = 2\overline{AN} + 2\overline{NA} = \vec{0}$	2p 3p
6.	$1 + 3\cos x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 2)(2\cos x + 1) = 0$ $\cos x = -\frac{1}{2}$ și, cum $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , obținem $x = \frac{2\pi}{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \end{vmatrix} = 8 + a + 2a - 4 - a^2 - 4 =$ $= -a^2 + 3a = a(3-a)$ , pentru orice număr real $a$	3p 2p
b)	$\det(A(0)) = 0$ și un minor principal este $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ Minor caracteristic este $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ , deci sistemul de ecuații este incompatibil	2p 3p

c)	Sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 3\}$ și soluția sistemului este $\left(1 - \frac{2}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$  $x_0, y_0$ și $z_0$ sunt numere întregi, deci $\frac{1}{a}$ este număr întreg și, cum și $a$ este număr întreg, obținem $a = -1$ sau $a = 1$ , care convin	3p  2p
2.a)	$x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1} - 1 =$ $= \sqrt{x^2(y^2 + 1) + (y^2 + 1)} - 1 = \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} - 1$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	2p  3p
b)	$\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} - 1 = 1 \Leftrightarrow (a^2 + 1)(b^2 + 1) = 2$ Cum $a$ și $b$ sunt numere naturale, obținem $a = 1, b = 0$ sau $a = 0, b = 1$	2p  3p
c)	$\underbrace{1 \circ 1 \circ \dots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}} = \sqrt{2^n - 1}$ , pentru orice număr natural $n, n \geq 2$  Dacă $\sqrt{2^n - 1} \in \mathbb{N}$ , există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = k^2 \Rightarrow k$ impar, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = (2m + 1)^2$ , de unde obținem $2^{n-1} = 2m^2 + 2m + 1$ , ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$	2p  3p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 =$ $= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}, x \in \mathbb{R}$	3p  2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( -\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x} \right)}{x} = -2$  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - 1} = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = -2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției $f$	2p  3p
c)	$\sqrt{x^2 + 2x + 2} > x + 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ , pentru orice număr real $x$ , deci funcția $f$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ $f$ continuă pe $\mathbb{R}$ , $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ , deci $\text{Im } f = (2, +\infty)$	2p  3p
2.a)	$\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)} dx = \int_1^2 (3x^2 - 2x) dx = (x^3 - x^2) \Big _1^2 =$ $= 8 - 4 - 1 + 1 = 4$	3p  2p
b)	$\int_0^1 x \ln(x+1) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^2-1}{2} \right)' \ln(x+1) dx = \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) \Big _0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) dx =$ $= -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big _0^1 = \frac{1}{4}$	3p  2p
c)	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^3} \int_0^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{3t^2} =$ $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{3t} = \frac{1}{3}$	3p  2p