Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

ЗАВДАННЯ I (30 балів)

5б **1.** Розглядають комплексне число $z = 2 + i$. Докажіть, що $z + \overline{z} + z\overline{z} = 9$, де $\overline{z}$ є спряженим для z.

5б **2.** Визначте дійсне число m, знаючи, що точка $A(1,m)$ належить графіку функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

5б **3.** Розв'яжіть у множині дійсних чисел рівняння $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x) = 0$.

5б **4.** Обчисліть ймовірність того, що, вибираючи число з множини двоцифрових натуральних чисел, цифра його десятків буде строго меншою від цифри одиниць.

5б **5.** У декартовому репері xOy розглядають точки $A(3,1)$, $B(3,3)$ і $C(0,2)$. У трикутнику ABC визначте довжину медіани проведеної з вершини C.

5б **6.** Докажіть, що $\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\cos^2 x - \left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)\sin^2 x = 0$, для будь-якого $x \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ЗАВДАННЯ II (30 балів)

1. Дано матрицю $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ і систему рівнянь $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$, де a - дійсне число.

5б **a)** Докажіть, що $\det(A(9)) = 0$.

5б **b)** Визначте дійсні значення a, для якого система має єдиний розв'язок.

5б **c)** Докажіть, що, якщо система має розв'язок (x_0, y_0, z_0), де - x_0, y_0 та z_0 ненульові дійсні числа, то $-x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0)$.

2. На множині дійсних чисел задають закон композиції $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.

5б **a)** Докажіть, що $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$, для будь-яких дійсних чисел x і y.

5б **b)** Визначте дійсні числа x, знаючи, що $x \circ x = x$.

5б **c)** Визначте дійсне число a, знаючи, що $2017^a \circ (-6) = 1$.

ЗАВДАННЯ III (30 балів)

1. Розглядають функцію $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x}$.

5б **a)** Докажіть, що $f'(x) = \dfrac{1 - x + x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x \in (1,+\infty)$.

5б **b)** Визначте рівняння горизонтальної асимптоти, прямуючої до $+\infty$ до графіка функції f.

5б **c)** Докажіть, що $x\ln x > x - 1$ для будь-якого $x \in (1,+\infty)$.

2. Розглядають функцію $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2$.

5б **a)** Докажіть, що $\int_0^1 \left(f(x) - 3x^2\right)dx = e - 1$.

5б **b)** Докажіть, що $\int_0^1 x f(x)\,dx = \dfrac{7}{4}$.

5б **c)** Знайдіть ненульове натуральне число n, для якого поверхня обмежена графіком функції $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$, віссю Ox і прямими, заданими рівняннями $x = 0$ і $x = n$, має площу рівну $n^2 - n + 1$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\overline{z}+z\overline{z}=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**
2.	$f(1)=m\Rightarrow 1+2-3=m$	**3p**
	$m=0$	**2p**
3.	$1-\log_2 x=0$ sau $2-\log_2 x=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților are 36 de elemente, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{90}=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$M(3,2)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CM=3$	**2p**
6.	$\left(1+\mathrm{tg}^2x\right)\cos^2 x-\left(1+\mathrm{ctg}^2x\right)\sin^2 x=\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x-\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x=$	**3p**
	$=\cos^2 x+\sin^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(9)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 9\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(9))=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 9\\ -2 & -1 & 3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+(-2)+(-18)-(-8)-(-9)-3=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & a\\ -2 & -1 & 3\end{vmatrix}=9-a$	**3p**
	Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{9\}$	**2p**
c)	Sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, deci $a=9$ și soluția sistemului este de forma $(5\alpha,-7\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$-x_0+y_0+z_0=-5\alpha+(-7\alpha)+\alpha=-11\alpha=11(5\alpha+(-7\alpha)+\alpha)=11(x_0+y_0+z_0)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=xy+7x+7y+49-7=$	**2p**
	$=x(y+7)+7(y+7)-7=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x\circ x=(x+7)^2-7$, deci $(x+7)^2-7=x$ $(x+7)(x+6)=0\Leftrightarrow x=-7$ sau $x=-6$	**2p** **3p**
c)	$\left(2017^a+7\right)(-6+7)-7=1\Leftrightarrow 2017^a+7-7=1$ $2017^a=1\Leftrightarrow a=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot(1-x)-\ln x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=$ $=\dfrac{\frac{1-x}{x}+\ln x}{(1-x)^2}=\dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2},\ x\in(1,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}=0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\ln x-x+1\Rightarrow g'(x)=\ln x$, deci $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$ Funcția g este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x\to1}g(x)=0$, obținem $g(x)>0$, deci $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_0^1\left(e^x+3x^2-3x^2\right)dx=\int_0^1 e^x dx=$ $=e^x\Big\vert_0^1=e-1$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1\left(xe^x+3x^3\right)dx=(x-1)e^x\Big\vert_0^1+\dfrac{3x^4}{4}\Big\vert_0^1=$ $=1\cdot e^0+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$	**3p** **2p**
c)	$g(x)=3x^2\Rightarrow\mathcal{A}=\int_0^n\lvert g(x)\rvert dx=\int_0^n 3x^2\,dx=x^3\Big\vert_0^n=n^3$ $n^3=n^2-n+1\Leftrightarrow(n-1)\left(n^2+1\right)=0\Leftrightarrow n=1$	**3p** **2p**