Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătați că $z+\overline{z}+z\overline{z}=9$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
5p	**2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ și $C(0,2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătați că $\left(1+\text{tg}^2 x\right)\cos^2 x-\left(1+\text{ctg}^2 x\right)\sin^2 x=0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&a\\-2&-1&3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+2z=0\\x+2y+az=0\\-2x-y+3z=0\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(9)\right)=0$.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+7x+7y+42$.
5p	**a)** Arătați că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele reale x, știind că $x\circ x=x$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, știind că $2017^a\circ(-6)=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=e-1$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^1 x f(x)\,dx=\frac{7}{4}$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu n^2-n+1.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\overline{z}+z\overline{z}=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**
2.	$f(1)=m\Rightarrow 1+2-3=m$	**3p**
	$m=0$	**2p**
3.	$1-\log_2 x=0$ sau $2-\log_2 x=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților are 36 de elemente, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{90}=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$M(3,2)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CM=3$	**2p**
6.	$\left(1+\text{tg}^2 x\right)\cos^2 x-\left(1+\text{ctg}^2 x\right)\sin^2 x=\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x-\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x=$	**3p**
	$=\cos^2 x+\sin^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(9)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(9))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+(-2)+(-18)-(-8)-(-9)-3=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&a\\-2&-1&3\end{vmatrix}=9-a$	**3p**
	Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow\det(A(a))\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{9\}$	**2p**
c)	Sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, deci $a=9$ și soluția sistemului este de forma $(5\alpha,-7\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$-x_0+y_0+z_0=-5\alpha+(-7\alpha)+\alpha=-11\alpha=11(5\alpha+(-7\alpha)+\alpha)=11(x_0+y_0+z_0)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=xy+7x+7y+49-7=$	**2p**
	$=x(y+7)+7(y+7)-7=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x\circ x=(x+7)^2-7$, deci $(x+7)^2-7=x$ $(x+7)(x+6)=0\Leftrightarrow x=-7$ sau $x=-6$	**2p** **3p**
c)	$\left(2017^a+7\right)(-6+7)-7=1\Leftrightarrow 2017^a+7-7=1$ $2017^a=1\Leftrightarrow a=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot(1-x)-\ln x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=$ $=\dfrac{\frac{1-x}{x}+\ln x}{(1-x)^2}=\dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}=0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\ln x-x+1\Rightarrow g'(x)=\ln x$, deci $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$ Funcția g este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x\to1}g(x)=0$, obținem $g(x)>0$, deci $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int\limits_0^1\left(e^x+3x^2-3x^2\right)dx=\int\limits_0^1 e^x dx=$ $=e^x\Big\vert_0^1=e-1$	**2p** **3p**
b)	$\int\limits_0^1 xf(x)dx=\int\limits_0^1\left(xe^x+3x^3\right)dx=(x-1)e^x\Big\vert_0^1+\dfrac{3x^4}{4}\Big\vert_0^1=$ $=1\cdot e^0+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$	**3p** **2p**
c)	$g(x)=3x^2\Rightarrow \mathcal{A}=\int\limits_0^n\vert g(x)\vert dx=\int\limits_0^n 3x^2\,dx=x^3\Big\vert_0^n=n^3$ $n^3=n^2-n+1\Leftrightarrow(n-1)\left(n^2+1\right)=0\Leftrightarrow n=1$	**3p** **2p**