Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-2i=0$.

5p **2.** Calculați $(g\circ f)(3)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2015$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x}=5^{3-3x}$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=2x+7$.

5p **6.** Determinaţi aria triunghiului MNP, ştiind că $MN=12$, $MP=3$ și $m(\sphericalangle M)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2+X-2$ este egal cu 0.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $e^x\geq x+1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)+2x-5)\,dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^2 \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{2014}^{2015} \dfrac{1}{f(x)}\,dx\leq\dfrac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$	**3p**
	$z^2-2i=2i-2i=0$	**2p**
2.	$f(3)=0$	**2p**
	$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(0)=2015$	**3p**
3.	$x^2-5x=3-3x \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$	**3p**
	$x_1=-1$ și $x_2=3$	**2p**
4.	$C_5^4=\dfrac{5!}{4!\cdot 1!}=$	**3p**
	$=5$	**2p**
5.	Panta dreptei d este egală cu 2	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y=2x+4$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{12\cdot 3\cdot \sin 30^\circ}{2}=\dfrac{6\cdot 3}{2}=$	**3p**
	$=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-0\cdot 0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&-a\\-a&1\end{vmatrix}=1-a^2$	**3p**
	$1-a^2=0 \Leftrightarrow a_1=-1$ și $a_2=1$	**2p**
c)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1+ab&-b-a\\-a-b&ab+1\end{pmatrix}$, $A(a+b)=\begin{pmatrix}1&-a-b\\-a-b&1\end{pmatrix}$, $abI_2=\begin{pmatrix}ab&0\\0&ab\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(a+b)+abI_2=\begin{pmatrix}1+ab&-a-b\\-a-b&1+ab\end{pmatrix}=A(a)A(b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-m\cdot 0+2=$	**3p**
	$=0-0+2=2$	**2p**
b)	Restul este $(3-m)X$	**3p**
	$3-m=0 \Leftrightarrow m=3$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=m(x_1+x_2+x_3)-6=m\cdot 0-6=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-1$ și $f'(0)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$	**3p**
b)	$e^x\le 1 \Leftrightarrow x\le 0$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$f'(0)=0$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	**2p**
	Cum f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$, obținem $f(x)\ge f(0)\Rightarrow e^x\ge x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1(f(x)+2x-5)dx=\int\limits_0^1(x^2-2x+5+2x-5)dx=\int\limits_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$\int\limits_0^2\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln(x^2-2x+5)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\ln 5-\ln 5=0$	**2p**
c)	$f(x)=(x-1)^2+4\ge 4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\int\limits_{2014}^{2015}\frac{1}{f(x)}dx\le\int\limits_{2014}^{2015}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}x\Big\vert_{2014}^{2015}=\frac{1}{4}$	**3p**