

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 2 + 3i$ și $z_2 = 1 - 3i$. Arătați că numărul $z_1 + z_2$ este real.
- 5p** 2. Calculați $(f \circ g)(1)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 64 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = 4x + 1$ și punctul $A(2, 0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d .
- 5p** 6. Arătați că $\sin(\pi - x)\sin x - \cos(\pi - x)\cos x = 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p** b) Arătați că $A \cdot B(x) + B(x) \cdot A = 3B(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $B(x) \cdot B(x) \cdot B(x) = B(x^2 + x - 2)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(0) = m$.
- 5p** b) Pentru $m = -1$, demonstrați că $(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 2x) dx = e - 1$
- 5p** b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = e - 3$.
- 5p** c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}(3e^2 - 19)$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 3i) =$ $= 3$, care este număr real	3p 2p
2.	$g(1) = 3$ $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 2$	2p 3p
3.	$4^x = 4^3$ $x = 3$	2p 3p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 13 numere naturale de două cifre care sunt divizibile cu 7, deci sunt 13 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{13}{90}$	1p 2p 2p
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 4 Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y = 4x - 8$	2p 3p
6.	$\sin(\pi - x)\sin x - \cos(\pi - x)\cos x = -\cos(\pi - x + x) =$ $= -\cos \pi = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = 0$	2p 3p
b)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix}, B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 2x & 0 & 2x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$ $A \cdot B(x) + B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3x & 0 \\ 3x & 0 & 3x \\ 0 & 3x & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} = 3B(x)$, pentru orice număr real x	2p 3p
c)	$B(x)B(x)B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x^3 & 0 \\ 2x^3 & 0 & 2x^3 \\ 0 & 2x^3 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x^2 + x - 2) = \begin{pmatrix} 0 & x^2 + x - 2 & 0 \\ x^2 + x - 2 & 0 & x^2 + x - 2 \\ 0 & x^2 + x - 2 & 0 \end{pmatrix}$ $2x^3 = x^2 + x - 2, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -1$	3p 2p
2.a)	$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + m =$ $= 0 - 0 + 0 + m = m$	3p 2p

b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2, x_1x_2x_3 = 1$	3p
	$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)}{x_1x_2x_3} = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4$	2p
c)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$	2p
	Dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, contradicție cu $x_1 + x_2 + x_3 = 2$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$	3p
	$= \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(0) = 1, f'(0) = -2$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2x}{x^2 + x + 1} \right)^x =$	2p
	$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2 + x + 1}} = e^{-2}$	3p
2.a)	$\int_0^1 (f(x) + 2x) dx = \int_0^1 e^x dx =$	2p
	$= e^x \Big _0^1 = e - 1$	3p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = e^x - x^2 + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}$	2p
	$F(1) = e - 3 \Rightarrow c = -2, \text{ deci } F(x) = e^x - x^2 - 2$	3p
c)	$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 (e^x - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} - 4xe^x + 4x^2) dx =$	2p
	$= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2x} - 4(x-1)e^x + 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^1 = \frac{\pi(3e^2 - 19)}{6}$	3p