

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Varianta 8

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**СУБЈЕКАТ I**

**(30 бодова)**

- 56 1. Докажете да  $(\sqrt{5} + 1)^2 + (\sqrt{5} - 1)^2 = 12$ .
- 56 2. Израчунајте производ  $f(1)f(2)f(3)f(4)$ , где  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 3$ .
- 56 3. Решите у скупу реалних бројева једначину  $\log_2(x^2 - 4x + 4) = 0$ .
- 56 4. Одредите колико непарних троцифрених природних бројева, са различитим цифрама, могу се створити са цифрама 2, 3 и 4.
- 56 5. У картезијанском систему  $xOy$  сматрају се тачке  $A(1, 2)$  и  $B(2, 3)$ . Одредите једначину праве  $d$  која садржи тачку  $A$  и нормална је на прави  $AB$ .
- 56 6. Докажете да  $\sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) = 0$ , за било који реални број  $x$ .

**СУБЈЕКАТ II**

**(30 бодова)**

1. Сматра се матрица  $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $x$  је реални број.
- 56 а) Докажете да  $\det(B(0)) = 1$ .
- 56 б) Докажете да  $B(x) + B(y) = 2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$ , за било које реалне бројеве  $x$  и  $y$ .
- 56 в) Одредите реалне бројеве  $x$  тако да  $B(x^2 + 1)B(x) = B(x^2 + x + 1)$ .
2. На скупу реалних бројева дефинише се асоцијативни закон слагања  $x \circ y = \frac{1}{2}(x-3)(y-3) + 3$ .
- 56 а) Докажете да  $(-3) \circ 3 = 3$ .
- 56 б) Одредите природне бројеве  $n$  тако да  $n \circ n = 11$ .
- 56 в) Израчунајте  $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2015$ .

**СУБЈЕКАТ III**

**(30 бодова)**

1. Сматра се функција  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ .
- 56 а) Докажете да  $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .
- 56 б) Докажете да функција  $f$  је конвексна на интервалу  $(1, +\infty)$ .
- 56 в) Одредите координате тачке која се налази на графику функције  $f$ , где тангенс на графику функције  $f$  јесте паралелан са правом једначине  $y = -3x$ .
2. Сматра се функција  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$ .
- 56 а) Докажете да  $\int_1^2 \frac{1}{x} f(x) dx = e(e-1)$ .
- 56 б) Одредите примитивну  $F$  функције  $f$  тако да  $F(1) = 0$ .
- 56 в) За сваки ненулта природни број  $n$  сматра се број  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ . Докажете да  $I_n + (n+1)I_{n-1} = e$ , за било који природни број  $n$ ,  $n \geq 2$ .

**Examenul de bacalaureat național 2015**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 8**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$(\sqrt{5} + 1)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$	2p
	$(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5} \Rightarrow (6 + 2\sqrt{5}) + (6 - 2\sqrt{5}) = 12$	3p
2.	$f(3) = 0$	3p
	$f(1)f(2)f(3)f(4) = 0$	2p
3.	$x^2 - 4x + 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$	2p
	$x_1 = 1$ și $x_2 = 3$ , care verifică ecuația dată	3p
4.	Cifra unităților este 3	2p
	Numerele sunt 243 și 423, deci se pot forma două astfel de numere	3p
5.	$m_{AB} = 1$ și $m_d \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = -1$	3p
	Ecuția dreptei $d$ este $y = -x + 3$	2p
6.	$\sin(\pi - x) = \sin x$	2p
	$\sin(\pi + x) = -\sin x \Rightarrow \sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) = \sin x - \sin x = 0$ , pentru orice număr real $x$	3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	3p
b)	$B(x) + B(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 3y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ 3x+3y & 0 & 2 \end{pmatrix} =$	3p
	$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot \frac{x+y}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	2p
c)	$B(x^2 + 1)B(x) = \begin{pmatrix} 3x^3 + 3x + 1 & 0 & x^2 + x + 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2 + x + 1) & 0 & 3x^3 + 3x + 1 \end{pmatrix}, B(x^2 + x + 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2 + x + 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2 + x + 1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3p
	$3x^3 + 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$	2p

<b>2.a)</b>	$(-3) \circ 3 = \frac{1}{2}(-3-3)(3-3) + 3 =$ $= 0 + 3 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$n \circ n = \frac{1}{2}(n-3)^2 + 3$ $(n-3)^2 = 16 \Leftrightarrow n_1 = -1$ , care nu convine, și $n_2 = 7$ , care convine	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$x \circ 3 = 3$ și $3 \circ y = 3$ , pentru $x$ și $y$ numere reale $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2015 = (1 \circ 2) \circ 3 \circ (4 \circ 5 \circ \dots \circ 2015) = 3 \circ (4 \circ 5 \circ \dots \circ 2015) = 3$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} =$ $= \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}, x \in (1, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}, x \in (1, +\infty)$ $f''(x) > 0$ , pentru orice $x \in (1, +\infty)$ , deci funcția $f$ este convexă pe intervalul $(1, +\infty)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = -3 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1$ Cum $x \in (1, +\infty)$ , coordonatele punctului sunt $x = 2$ și $y = 4$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^2 \frac{1}{x} f(x) dx = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big _1^2 =$ $= e^2 - e = e(e-1)$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = (x-1)e^x + c$ , unde $c \in \mathbb{R}$ $F(1) = 0 \Rightarrow c = 0$ , deci $F(x) = (x-1)e^x$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = (x^{n+1} e^x) \Big _0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx =$ $= e - (n+1)I_{n-1}$ , deci $I_n + (n+1)I_{n-1} = e$ , pentru orice număr natural $n, n \geq 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>