

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

THEMA 1

(30 Puncte)

- 5p 1. Zeige, dass $(\sqrt{5} + 1)^2 + (\sqrt{5} - 1)^2 = 12$.
- 5p 2. Berechne das Produkt $f(1)f(2)f(3)f(4)$, wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$.
- 5p 3. Löse, in der Menge der reellen Zahlen, die Gleichung $\log_2(x^2 - 4x + 4) = 0$.
- 5p 4. Bestimme wie viele dreistellige natürliche ungerade Zahlen, mit verschiedenen Ziffern, mit den Ziffern 2, 3 und 4 gebildet werden können.
- 5p 5. Im kartesischen Koordinatensystem xOy sind die Punkte $A(1,2)$ und $B(2,3)$ gegeben. Bestimme die Gleichung der Geraden d die durch den Punkt A geht und senkrecht auf die Gerade AB steht.
- 5p 6. Zeige, dass $\sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) = 0$, für jede reelle Zahl x .

THEMA 2

(30 Puncte)

1. Es sei die Matrix $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben, wobei x eine reelle Zahl ist.
- 5p a) Zeige, dass $\det(B(0)) = 1$.
- 5p b) Zeige, dass $B(x) + B(y) = 2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, für alle reellen Zahlen x und y .
- 5p c) Bestimme die reellen Zahlen x für welche $B(x^2 + 1)B(x) = B(x^2 + x + 1)$.
2. Auf der Menge der reellen Zahlen wird die assoziative Verknüpfung $x \circ y = \frac{1}{2}(x-3)(y-3) + 3$ definiert.
- 5p a) Zeige, dass $(-3) \circ 3 = 3$.
- 5p b) Bestimme die natürlichen Zahlen n für welche $n \circ n = 11$.
- 5p c) Berechne $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2015$.

THEMA 3

(30 Puncte)

1. Gegeben ist die Funktion $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.
- 5p a) Zeige, dass $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Zeige, dass die Funktion f auf dem Intervall $(1, +\infty)$ konvex ist.
- 5p c) Bestimme die Koordinaten des Punktes der sich auf dem Schaubild von f befindet, in welchem die Tangente zum Schaubild parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -3x$ ist.
2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
- 5p a) Zeige, dass $\int_1^2 \frac{1}{x} f(x) dx = e(e-1)$.
- 5p b) Bestimme die Stammfunktion F der Funktion f , für welche $F(1) = 0$.

- 5p** c) Für jede natürliche von Null verschiedene Zahl n ist die Zahl $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ gegeben. Zeige, dass
 $I_n + (n+1)I_{n-1} = e$, für jede natürliche Zahl n , $n \geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{5} + 1)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$	2p
	$(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5} \Rightarrow (6 + 2\sqrt{5}) + (6 - 2\sqrt{5}) = 12$	3p
2.	$f(3) = 0$	3p
	$f(1)f(2)f(3)f(4) = 0$	2p
3.	$x^2 - 4x + 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$	2p
	$x_1 = 1$ și $x_2 = 3$, care verifică ecuația dată	3p
4.	Cifra unităților este 3	2p
	Numerele sunt 243 și 423, deci se pot forma două astfel de numere	3p
5.	$m_{AB} = 1$ și $m_d \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = -1$	3p
	Ecuația dreptei d este $y = -x + 3$	2p
6.	$\sin(\pi - x) = \sin x$	2p
	$\sin(\pi + x) = -\sin x \Rightarrow \sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) = \sin x - \sin x = 0$, pentru orice număr real x	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	3p
b)	$B(x) + B(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 3y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ 3x+3y & 0 & 2 \end{pmatrix} =$	3p
	$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot \frac{x+y}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	2p
c)	$B(x^2 + 1)B(x) = \begin{pmatrix} 3x^3 + 3x + 1 & 0 & x^2 + x + 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2 + x + 1) & 0 & 3x^3 + 3x + 1 \end{pmatrix}, B(x^2 + x + 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2 + x + 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2 + x + 1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3p
	$3x^3 + 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$	2p

2.a)	$(-3) \circ 3 = \frac{1}{2}(-3-3)(3-3) + 3 =$ $= 0 + 3 = 3$	3p 2p
b)	$n \circ n = \frac{1}{2}(n-3)^2 + 3$ $(n-3)^2 = 16 \Leftrightarrow n_1 = -1$, care nu convine, și $n_2 = 7$, care convine	2p 3p
c)	$x \circ 3 = 3$ și $3 \circ y = 3$, pentru x și y numere reale $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2015 = (1 \circ 2) \circ 3 \circ (4 \circ 5 \circ \dots \circ 2015) = 3 \circ (4 \circ 5 \circ \dots \circ 2015) = 3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} =$ $= \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}, x \in (1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}, x \in (1, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(1, +\infty)$	3p 2p
c)	$f'(x) = -3 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1$ Cum $x \in (1, +\infty)$, coordonatele punctului sunt $x = 2$ și $y = 4$	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 \frac{1}{x} f(x) dx = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big _1^2 =$ $= e^2 - e = e(e-1)$	3p 2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = (x-1)e^x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ $F(1) = 0 \Rightarrow c = 0$, deci $F(x) = (x-1)e^x$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = (x^{n+1} e^x) \Big _0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx =$ $= e - (n+1)I_{n-1}$, deci $I_n + (n+1)I_{n-1} = e$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$	3p 2p