

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 бодова)

- 56 1. Одредите трећи члан аритметичке прогресије $(a_n)_{n \geq 1}$, знајући да $a_1 = 2$ и $a_2 = 5$.
- 56 2. Одредите реални број a , знајући да тачка $A(3,5)$ припада графику функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a - x$.
- 56 3. Решите у скупу реалних бројева једначину $8^{4-x} = 2^{2x+2}$.
- 56 4. Израчунајте вероватноћу да, бирајући један број из скупа природних двоцифрених бројева, он да има производ цифара једнак са 0.
- 56 5. У картезијанском систему xOy сматра се тачка $M(1,1)$. Одредите једначину праве која садржи тачку M и има нагиб једнак са 2.
- 56 6. Сматра се троугао ABC са $AB = 5$, $AC = 12$ и $BC = 13$. Докажите да $\sin C = \frac{5}{13}$.

SUBIECTUL II

(30 бодова)

1. Сматра се матрица $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, где x је реални број.
- 56 а) Докажите да $\det(A(1)) = 2$.
- 56 б) Докажите да $A(x)A(y) = A(xy + x + y)$, за било које реалне бројеве x и y .
- 56 в) Одредите реалне бројеве x , знајући да $A(x)A(x)A(x) = A(7)$.
2. Сматра се полином $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, где m је реални број.
- 56 а) Докажите да $f(0) = m$.
- 56 б) За $m = 1$, докажите да $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, где x_1, x_2 и x_3 су солуције полинома f .
- 56 в) Одредите прости природни број m , знајући да полином f има једну целу солуцију.

SUBIECTUL III

(30 бодова)

1. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$.
- 56 а) Докажите да $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 56 б) Одредите једначину хоризонталне асимптоте према $+\infty$ на графику функције f .
- 56 в) Докажите да извод функције f је опадајући на \mathbb{R} .
2. Сматра се функција $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
- 56 а) Докажите да $\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$.
- 56 б) Израчунајте површину одређену од графика функције f , осе Ox и праве једначина $x = 1$ и $x = e$.
- 56 в) Одредите природни ненулта број n , знајући да $\int_1^e \frac{1}{x} (f(x))^n dx = \frac{1}{2015}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = 5 - 2 = 3$ $a_3 = 5 + 3 = 8$	3p 2p
2.	$f(3) = 5 \Leftrightarrow a - 3 = 5$ $a = 8$	3p 2p
3.	$2^{3(4-x)} = 2^{2x+2} \Leftrightarrow 12 - 3x = 2x + 2$ $x = 2$	3p 2p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 9 numere naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 0, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	1p 2p 2p
5.	$y - y_M = 2(x - x_M)$ $y = 2x - 1$	2p 3p
6.	$13^2 = 5^2 + 12^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - (-2) - 0 - 0 = 2$	2p 3p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} (1-x)(1-y) - 2xy & 0 & (1-x)2y + 2x(1+2y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -x(1-y) - (1+2x)y & 0 & -2xy + (1+2x)(1+2y) \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 - (xy + x + y) & 0 & 2(xy + x + y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -(xy + x + y) & 0 & 1 + 2(xy + x + y) \end{pmatrix} = A(xy + x + y), \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	3p 2p
c)	$A(x)A(x)A(x) = A((x+1)^3 - 1)$, pentru orice număr real x $(x+1)^3 - 1 = 7 \Leftrightarrow x = 1$	3p 2p
2.a)	$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 0 + m =$ $= 0 + 0 + 0 + m = m$	3p 2p

b)	$x_1 + x_2 + x_3 = -2, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1, x_1x_2x_3 = -1$	3p
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) - 3 = -2((-2)^2 - 2 \cdot 1) - (-2) - 3 = -5 = 5x_1x_2x_3$	2p
c)	$x_1 \in \mathbb{Z}$ și $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow m = -x_1(x_1 + 1)^2$	2p
	Deoarece m este prim, obținem $(x_1 + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0$, care nu convine, sau $x_1 = -2$, pentru care $m = 2$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' =$	3p
	$= 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f''(x) = -\frac{x'\sqrt{x^2+1} - x(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = -\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$	3p
	$f''(x) < 0$, pentru orice număr real x , deci funcția f' este descrescătoare pe \mathbb{R}	2p
2.a)	$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _1^e =$	3p
	$= \ln e - \ln 1 = 1$	2p
b)	$\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big _1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx =$	3p
	$= e - x \Big _1^e = e - e + 1 = 1$	2p
c)	$\int_1^e \frac{1}{x} (f(x))^n dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln^n x dx = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} x \Big _1^e = \frac{1}{n+1}$	3p
	$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2015} \Leftrightarrow n = 2014$	2p