Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 3$ şi raţia $r = 2$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ şi $C(-2,5)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, ştiind că M este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Calculaţi $\operatorname{ctg} a$, ştiind că $\sin a = \frac{1}{3}$ şi $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(3))$.

5p **b)** Arătaţi că $A(-2015) + A(2015) = 2A(0)$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = x^2$.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + aX$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ şi $a \in \mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Calculaţi $f(\hat{0})$.

5p **b)** Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{3}) = \hat{3}$.

5p **c)** Arătaţi că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{4}{3} - \ln 2$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, are aria egală cu $\frac{1}{2} + \ln\left(n^2 + n\right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3=3+(3+2)+(3+2\cdot 2)=$	**3p**
	$=15$	**2p**
2.	$-\frac{b}{2a}=-1$	**2p**
	$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{12}{4}=-3$	**3p**
3.	$x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente este egal cu $C_5^3=$	**3p**
	$=10$	**2p**
5.	$M(-2,3)$	**2p**
	$AM=4$	**3p**
6.	$\cos a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$\operatorname{ctg} a=2\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(3))=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 3=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	$A(-2015)=\begin{pmatrix}2 & -2015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A(2015)=\begin{pmatrix}2 & 2015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(-2015)+A(2015)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A(0)$	**3p**
c)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}2 & x\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-x$	**2p**
	$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x_1=-3$ și $x_2=2$	**3p**
2.a)	$f(\hat{0})=\hat{0}^3+a\cdot\hat{0}=$	**2p**
	$=\hat{0}$	**3p**
b)	$f(\hat{3})=\hat{2}+a\cdot\hat{3}$	**2p**
	$\hat{2}+a\cdot\hat{3}=\hat{3}\Rightarrow a=\hat{2}$	**3p**
c)	$\hat{1}+a=\hat{3}+a\cdot\hat{2}\Rightarrow a=\hat{3}$	**2p**
	$f(\hat{3})=\hat{1}$ și $f(\hat{4})=\hat{1}\Rightarrow f(\hat{3})=f(\hat{4})$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x+\ln x)'\cdot x-(x+\ln x)\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x-x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=1$, $f'(1)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$	**1p**
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,e]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,e]$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in[e,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[e,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+\dfrac{x}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x^2+1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{x^3}{3}+x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{4}{3}-\ln 2$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}+\ln 2=\dfrac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)\Rightarrow n=-2$ nu este număr natural şi $n=1$	**2p**