Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculaţi $(z-1)^2$.

5p **2.** Arătaţi că $3(x_1+x_2)-4x_1x_2=3$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+3=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x+4$ şi punctul $A(1,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=12$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & a+1\\ 2 & a+2 & a+3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(a))$.

5p **b)** Determinați numărul natural n, ştiind că $2A(n^2)-A(n)=A(6)$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX-3$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătaţi că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m, ştiind că polinomul f este divizibil cu $X+1$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real strict pozitiv m, polinomul f are două rădăcini de module egale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^2 f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătaţi că $nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(z-1)^2 = i^2 =$	**2p**
	$= -1$	**3p**
2.	$x_1 + x_2 = 5$	**2p**
	$x_1 \cdot x_2 = 3 \Rightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 3$	**3p**
3.	$(2^x - 1)(2^x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$ sau $2^x = 2$	**3p**
	$x = 0$ sau $x = 1$	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre care sunt divizibile cu 13, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	Panta paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $m = 3$	**3p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y = 3x - 3$	**2p**
6.	$\sin C = \dfrac{1}{2}$	**2p**
	$\dfrac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = 12$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$	**3p**
b)	$2A(n^2) - A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2n^2 - n & 2n^2 - n + 1 \\ 2 & 2n^2 - n + 2 & 2n^2 - n + 3 \end{pmatrix}$, $A(6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	**3p**
	$2n^2 - n - 6 = 0 \Rightarrow n = -\dfrac{3}{2} \notin \mathbb{N}$, $n = 2 \in \mathbb{N}$	**2p**

c)	Pentru $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, avem $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\2015y+2016z=0\\2x+2017y+2018z=0\end{cases}$	**2p**
	Determinantul sistemului omogen este egal cu $0\Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluţii, deci există o infinitate de matrice X	**3p**
2.a)	$f=X^3+2X-3$	**2p**
	$f(1)=1+2-3=0$	**3p**
b)	$f=X^3+mX-3$ este divizibil cu $X+1\Leftrightarrow f(-1)=0$	**2p**
	$m=-4$	**3p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2m<0\Rightarrow f$ are cel puţin o rădăcină din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$	**2p**
	$f\in\mathbb{R}[X]\Rightarrow f$ are două rădăcini conjugate din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, care au modulele egale	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x-x-(x+1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{1-xe^x}{(e^x-x)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=1$, $f'(0)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x+1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{e^{-x}+x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{1-e^{-x}}=-1$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f^2(x)dx=\int_0^2\dfrac{1}{x^2+4}dx=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\dfrac{\pi}{8}$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$	**2p**
	$F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0$ pentru orice număr real x, deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+4}}dx=x^{n-1}\sqrt{x^2+4}\Big\|_0^1-(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx=\sqrt{5}-(n-1)\int_0^1\dfrac{x^{n-2}(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}dx=$	**3p**
	$=\sqrt{5}-(n-1)I_n-4(n-1)I_{n-2}\Rightarrow nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**2p**