

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Mennyi az x valós szám értéke, ha 2, $x+2$ és 10 számok egy számtani haladvány egymásutáni tagjai?
- 5p 2. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 10$ függvény minimumát!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_2(x^2 - 2x) = 3$ egyenletet!
- 5p 4. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy kétjegyű természetes szám páros legyen?
- 5p 5. Határozd meg az a valós számot, ha az $\vec{u} = (a-2)\vec{i} - 2\vec{j}$ és $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ellentett vektorok!
- 5p 6. Számítsd ki az A szög koszinuszát abban az ABC háromszögben, amelyben $AB = 4$, $AC = 5$ és $BC = 6$.

II. FELADAT

(30 punct)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok.
- 5p a) Számítsd ki $\det B$ értékét!
- 5p b) Igazold, hogy $AB = BA$
- 5p c) Határozd meg az x valós szám azon értékeit, amelyekre $\det(B + xA) = 1$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - 4(x + y - 5)$ asszociatív algebrai műveletet.
- 5p a) Számítsd ki $4 * 5$ értékét!
- 5p b) Igazold, hogy $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p c) Számítsd ki $1 * 2 * 3 * \dots * 2014$ értékét!

III. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ függvény.
- 5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ határértéket!
- 5p b) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Igazold, hogy az f függvény konvex a $(-1, 1)$ intervallumon!
2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_1^e f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Igazold, hogy $\int_1^e x^3 f(x) dx = \frac{3e^4 + 1}{16}$.
- 5p c) Számítsd ki az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x = 1$ és $x = e$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică M_{st-nat}

Barem de evaluare și de notare

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$x + 2 = \frac{2+10}{2}$ $x = 4$	3p 2p
2.	$\Delta = 44$ Valoarea minimă a funcției f este egală cu $-\frac{\Delta}{4a} = -11$	2p 3p
3.	$x^2 - 2x - 8 = 0$ $x_1 = -2$ și $x_2 = 4$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	Sunt 45 de numere pare de două cifre, deci sunt 45 de cazuri favorabile Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$	2p 1p 2p
5.	$\vec{u} = -\vec{v} \Leftrightarrow a - 2 = -3$ $a = -1$	3p 2p
6.	$\cos A = \frac{16 + 25 - 36}{2 \cdot 4 \cdot 5} =$ $= \frac{1}{8}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 =$ $= -1$	3p 2p
b)	$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = BA$	2p 3p
c)	$\det(B + xA) = \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 2x^2 - 1$ $2x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1$ și $x_2 = 1$	3p 2p
2.a)	$4 * 5 = 4 \cdot 5 - 4(4 + 5 - 5) =$ $= 4$	3p 2p

b)	$x * y = xy - 4x - 4y + 16 + 4 =$ $= x(y - 4) - 4(y - 4) + 4 = (x - 4)(y - 4) + 4$ pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$x * 4 = 4 * x = 4$ pentru orice număr real x $1 * 2 * 3 * \dots * 2014 = (1 * 2 * 3) * 4 * (5 * \dots * 2014) = 4 * (5 * \dots * 2014) = 4$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} =$ $= 1$	2p 3p
b)	$f'(x) = \frac{(x^2 - 3)' \cdot (x^2 + 3) - (x^2 - 3) \cdot (x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} =$ $= \frac{2x(x^2 + 3) - 2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{36(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^3}, x \in \mathbb{R}$ $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1, 1) \Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(-1, 1)$	3p 2p
2.a)	$\int_1^e f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) \Big _1^e =$ $= \frac{1}{2} (f^2(e) - f^2(1)) = \frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$\int_1^e x^3 f(x) dx = \int_1^e \left(\frac{x^4}{4} \right)' \ln x dx = \frac{x^4}{4} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx =$ $= \frac{e^4}{4} - \frac{x^4}{16} \Big _1^e = \frac{3e^4 + 1}{16}$	2p 3p
c)	$\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big _1^e =$ $= (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1$	3p 2p