

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică $M_mate-info$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ știind că $a_1 = 6$ și $a_2 = 12$.
- 5p** 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 4$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cifra 1.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB = 2$. Calculați lungimea vectorului $\overline{AB} + \overline{BC}$.
- 5p** 6. Calculați aria triunghiului isoscel ABC știind că $A = \frac{\pi}{2}$ și $AC = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
- 5p** c) Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ știind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$, unde m este număr real.
- 5p** a) Calculați $f(1)$.
- 5p** b) Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.
- 5p** c) Determinați numărul real m știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $f(x) \leq \frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{11}{6}$.
- 5p** b) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$. Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n .
- 5p** c) Determinați numărul real pozitiv a știind că $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)} dx = \ln 3$.

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c) – 2 iulie 2014

Matematică *M_mate-info*

Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_3 = 18$ $a_1 + a_2 + a_3 = 36$	2p 3p
2.	$x_V = -1$ $y_V = 3$	2p 3p
3.	$3^x = 1$ sau $3^x = 3$ $x = 0$ sau $x = 1$	2p 3p
4.	Sunt 18 numere de două cifre care conțin cifra 1, deci sunt 18 cazuri favorabile Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$	2p 1p 2p
5.	$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ $\triangle ABC$ echilateral $\Rightarrow AC = 2$	2p 3p
6.	$\triangle ABC$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow AB = 4$ $A_{\triangle ABC} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = (a-2)^2(a+2)$ $(a-2)^2(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = -2 \text{ sau } a = 2$	3p 2p
c)	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + m =$ $= m + 2$	2p 3p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 3 = -2$	2p 3p

c)	$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 3m = 0$	2p
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3m - 10 \Rightarrow m = -6$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} =$	2p
	$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(e) = 0, f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, e)$ și $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (e, +\infty)$	3p
	$f(x) \leq f(e) \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}$	2p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1} dx$ pentru orice număr natural nenul n	2p
	Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in [0, 1]$ avem $x^n \geq 0, x - 1 \leq 0$ și $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$	3p
c)	$\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)} dx = \int_0^a \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \left(\ln(x^2+x+1) \right) \Big _0^a = \ln(a^2+a+1)$	3p
	$\ln(a^2+a+1) = \ln 3 \Leftrightarrow a^2+a+1=3$ care are soluția pozitivă $a=1$	2p