Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba DNL
Matematică
secţii bilingve francofone

Varianta 9

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

PREMIER SUJET (30 points)

1ère partie: QCM (20 points)

Pour chaque question de cet exercice, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

5p **1.** Le prix d'un article a d'abord été doublé, puis triplé. Le taux d'évolution est:

A : 600%	B : 500%	C : 400%	D : 300%

5p **2.** Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires, ayant toutes la même probabilité d'être tirées. On tire simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que les deux boules soient blanches?

$A: \frac{1}{2}$	$B: \frac{1}{6}$	$C: \frac{1}{15}$	$D: \frac{1}{30}$

5p **3.** L'équation réduite d'une droite étant $y = 2x + 3$, l'un des vecteurs directeurs de la droite est:

$A: \vec{u}(2,1)$	$B: \vec{u}(1,2)$	$C: \vec{u}(-1,2)$	$D: \vec{u}(2,-1)$

5p **4.** Soit ABC un triangle et D le symétrique de B par rapport à C. Alors:

$A: \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$	$B: \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$	$C: \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$	$D: \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$

2ème partie: questions de cours (10 points)

5p **5.** Soit le tableau suivant d'une série statistique

Variable	x_1	x_2	x_3
Effectif	n_1	n_2	n_3

Démontrer que lorsqu'on ajoute une même quantité m à chacune des valeurs de la variable, cela revient à ajouter la même quantité à la moyenne.

5p **6.** Dans une classe de 28 élèves, la moyenne des notes des garçons est 10 ; la moyenne des notes des filles est 12, la moyenne générale est 11,5. Combien y a-t-il de garçons et de filles dans la classe?

DEUXIÈME SUJET (60 points)

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = 2^n u_n$.

5p **a)** Calculer u_2 et u_3.

5p **b)** Démontrer que $v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5p **c)** En déduire que (v_n) est une suite arithmétique.

5p **d)** Déterminer le terme général de (v_n).

5p **e)** En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5p **f)** Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n.

2. Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé, on considère le nombre complexe $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$.

5p **a)** Ecrire la forme algébrique de z .

5p **b)** Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=-1+i\sqrt{3}$.

5p **c)** Donner le module et l'argument réduit de z .

On désigne par A, B et O les points du plan ayant pour affixes respectives $z_A=1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1+i\sqrt{3}$ et $z_O=0$.

5p **d)** Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

5p **e)** Déterminer l'affixe du point C tel que le quadrilatère $OABC$ soit parallélogramme.

5p **f)** Si D est le symétrique de O par rapport à B, montrer que le triangle OAD est rectangle.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba DNL
Matematică
secţii bilingve francofone
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

PREMIER SUJET **(30 points)**

1ère partie : QCM (20 points)		
1.	*B*	**5p**
2.	*C*	**5p**
3.	*B*	**5p**
4.	*D*	**5p**
2ème partie : questions de cours (10 points)		
5.	On a $\overline{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3}{n_1+n_2+n_3}$	**1p**
	La moyenne de la nouvelle série statistique, $\overline{y}$ s'écrit $\overline{y}=\frac{n_1(x_1+m)+n_2(x_2+m)+n_3(x_3+m)}{n_1+n_2+n_3}$	**2p**
	On développe et on dissocie les deux quotients $\overline{y}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3}{n_1+n_2+n_3}+\frac{m(n_1+n_2+n_3)}{n_1+n_2+n_3}$	
	On obtient $\overline{y}=\overline{x}+m$	**2p**
6.	Si on désigne par n le nombre de garçons, et par $y_1, y_2....y_n$ les notes de garçons on a $\overline{y}=\frac{y_1+y_2+....+y_n}{n}=10$	**1p**
	On désigne $x_1, x_2....x_{28-n}$ les notes des filles, alors $\overline{x}=\frac{x_1+x_2+....+x_{28-n}}{28-n}=12$	**2p**
	La moyenne générale de la classe est alors $\frac{10n+(28-n)12}{28}=11,5\Leftrightarrow 2n=28(12-11,5)$, d'où n=7. Il y a donc 7 garçons et 21 filles dans la classe	**2p**

DEUXIÈME SUJET **(60 points)**

1.a)	$u_2=2-\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{7}{4}$	**2p**
	$u_3=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{5}{4}$	**3p**
b)	$v_{n+2}-v_{n+1}=v_{n+1}-v_n\Leftrightarrow 2^{n+2}u_{n+2}=2\cdot 2^{n+1}u_{n+1}-2^nu_n\Leftrightarrow 4u_{n+2}=4u_{n+1}-u_n$	**3p**
	En utilisant l'hypothèse $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n, \forall n\in\mathbb{N}$ on obtient $4u_{n+2}=4u_{n+1}-u_n$ donc $v_{n+2}-v_{n+1}=v_{n+1}-v_n$	**2p**
c)	$v_{n+2}-v_{n+1}=v_{n+1}-v_n, \forall n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow v_{n+1}=\frac{v_{n+2}+v_n}{2}, \forall n\in\mathbb{N}$	**3p**
	Donc (v_n) est une suite arithmétique	**2p**
d)	Soit r la raison de la suite $(v_n)\Rightarrow r=v_1-v_0=2\cdot 2-1=3$	**2p**
	Alors $v_n=v_0+nr=1+3n, \forall n\in\mathbb{N}$	**3p**

e)	$v_n = 2^n u_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{2^n}$	**2p**
	$u_n = \frac{1+3n}{2^n}$	**3p**
f)	Pour calculer la somme S_n, on utilise la formule de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ En écrivant les relations $u_{k+2} = u_{k+1} - \frac{1}{4}u_k$, pour $k \in \overline{0,n}$ on a $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0$ $u_3 = u_2 - \frac{1}{4}u_1$ ..... $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}u_{n-1}$ $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$	**2p**
	En les additionnant on obtient $u_{n+2} = u_1 - \frac{1}{4}(u_0 + u_1 + .. + u_n) \Rightarrow u_{n+2} = u_1 - \frac{1}{4}S_n$	**1p**
	Donc $\frac{1+3(n+2)}{2^{n+2}} = 2 - \frac{1}{4}S_n$, d'où on a $S_n = 8 - \frac{3n+7}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$	**2p**
2.a)	$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{4} =$	**2p**
	$= \frac{-\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{4} = \frac{-(-2+2i\sqrt{3})}{4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
b)	Le module de z_1 est égal à $\left\|1+i\sqrt{3}\right\| = \sqrt{1+3} = 2$	
	Puisque $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$, la forme trigonométrique est $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	**2p**
	Le module de z_2 est égal à $\left\|-1+i\sqrt{3}\right\| = \sqrt{1+3} = 2$	
	Puisque $-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$, la forme trigonométrique est $z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	**3p**
c)	En utilisant les propriétés du module d'un nombre complexe on a $\left\|z\right\| = \frac{\left\|z_1\right\|}{\left\|z_2\right\|} = 1$	**1p**
	$z = \frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$	**2p**
	Comme $\frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi[$, l'argument réduit de z est $\frac{5\pi}{3}$	**2p**
d)	En utilisant la forme complexe pour le calcul des longueurs, on a: $OA = \left\|z_A - z_O\right\| = \left\|z_A\right\| = 2$, $OB = \left\|z_B - z_O\right\| = \left\|z_B\right\| = 2$ et $AB = \left\|z_A - z_B\right\| = \left\|1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}\right\| = 2$	**3p**
	$OA = OB = OC$, donc le triangle ABC est équilatéral	**2p**
e)	$OABC$ est parallélogramme $\Leftrightarrow$ les segments OB et AC ont le même milieu $\Rightarrow z_O + z_B = z_A + z_C$	**2p**
	$0 - 1 + i\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3} + z_C \Rightarrow z_C = -2$	**3p**

f)	D est le symétrique de O par rapport à $B \Leftrightarrow B$ est le milieu du segment $OD \Leftrightarrow z_B = \frac{z_O + z_D}{2}$	
	$z_D = -2 + 2i\sqrt{3}$	**2p**
	En calculant les longueurs, on obtient $AD = \lvert z_D - z_A \rvert = 2\sqrt{3}$, $OA = \lvert z_A \rvert = 2$ et $OD = 2OB = 4$	**2p**
	Alors $OD^2 = AD^2 + OA^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAD est rectangle en A	**1p**