Varianta 1 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $n = 4a+1; 1+5+9+...+(4a+1) = 231$; $\frac{(4a+2)(a+1)}{2} = 231$; $2a^2+3a-230=0$; $a=10, n=41$

2. $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$; $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$

3. $y>1,\ y=x^2+1;\ f^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty),\ f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$

4. $C_{10}^3 = 120$ submulțimi cu trei elemente

5. $\sqrt{(2-m)^2+(2+m)^2} = 4$; $m = \pm 2$

6. $\cos\frac{23\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Calcul direct

b) Se demonstrează prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Din ipoteză rezultă $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X$, iar din **a)**, că există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

Folosind **b)** găsim $\begin{cases} \frac{(u+v)^3+(u-v)^3}{2} = 2 \\ \frac{(u+v)^3-(u-v)^3}{2} = 1 \end{cases}$ și soluția: $X = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} & \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \end{pmatrix}$.

2. a) Calcul direct.

b) Calcul direct, $-\widehat{16} = \hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$.

c) Pentru $a \in \mathbb{Z}_7$, $a \neq \hat{0}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{6} + a \cdot x$. Avem $f\left(a^{-1}\right) = \hat{0}$, deci f este reductibil.

Pentru $a = \hat{0}$, $f = \left(X^3 - \hat{3}\right)\cdot\left(X^3 + \hat{3}\right)$, deci f este reductibil.

Varianta 1 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=-a\, si \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+a\cdot x\right)=0$,dreapta $y=-a\cdot x$ este asimptota oblică spre $-\infty$.

b) $x=\ln a$ este punct de minim.

c) Din ipoteza că avem că $f(x)\geq f(0),\forall x\in\mathbb{R}$,deci $x=0$ este punct de minim pentru f . Din T.Fermat deducem că $f'(0)=0\Leftrightarrow a=1$ și verificare.

2.a) F este derivabila pe $(0;\infty)$. $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2)+2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=f(x),x>0$.

b) G primitiva $\Rightarrow$ G este derivabila. $G'(x)=f(x)\geq 0,\forall x\geq 1\Rightarrow$ concluzia.

c) Aria $=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|f(x)\right|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx=-F(x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+F(x)\Big|_{1}^{e}=-2\sqrt{e}-\frac{6}{\sqrt{e}}+8$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = -i; (-i)^{12} = 1$

2. $x^2 - 6x + 5 = 0$ **;** $x \in \{1,5\}$

3. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

4. $p = \frac{81}{90} = 0,9$

5. $M(1,3)$ este mijlocul lui (BC); $AM = 5$

6. $m(m-2) + 3 \cdot (-1) = 0$; $m = 3$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Calcul direct. Se obține $a = 3$.

b) $A^{10} = 3^9 \cdot A$, deci $rang\left(A^{10}\right) = 1$.

c) $B = A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se obține $B^{2008} = I_2$.

2. a) Pentru $a, b \in M$, avem $e^a + e^b - 1 \geq 1$, deci $a * b \in [0, \infty) = M$.

b) Pentru $a, b, c \in M$ se demonstrează că $(a*b)*c = a*(b*c) = \ln\left(e^a + e^b + e^c - 2\right)$.

c) Se demonstrează prin inducție că $\underbrace{a*a*...*a}_{de\ n\ ori\ a} = \ln\left(n \cdot e^a - (n-1)\right)$.

Se obțin apoi soluțiile $a = 0$ și $a = \ln(n-1)$.

Varianta 2 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Se demonstreaza prin inductie matematica.

b) $a_{n+1} - a_n = -a_n \cdot \sqrt{a_n} < 0 \Rightarrow$ sirul dat este strict descrescator.

c) Cum $a_k^2 < a_k \cdot \sqrt{a_k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, însumând se deduce relația cerută.

2.a) F este derivabila pe $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = f(x).$$

b)Aria ceuta este $A = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1 = \ln 4.$

c)Limita ceruta este $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(F(n) - F(-n)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$

Varianta 3 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $\left(\sqrt{2}\right)^{12} = 2^6$ **;** $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{12} = 4^4$ **;** $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12} = 5^3$ **;** $2^6 < 5^3 < 4^4$ **;** $\sqrt{2}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{4}$

2. $\min f = -\dfrac{\Delta}{4a}$ **;** $\min f = -3$

3. $\lg(x-1)(6x-5) = \lg 100$ **;** $x = 5$

4. $p = \dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15}$

5. ecuația perpendicularei din A pe $d : 3x + 2y - 26 = 0$

6. $\dfrac{7}{9}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) $\det\left(A^2 + B^2\right) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -15$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Dacă $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ și $X \cdot Y = Y \cdot X$, atunci

$$\det\left(X^2 + Y^2\right) = \det\left((X + i \cdot Y)(X - i \cdot Y)\right) \overset{b)}{=} \det(X + i \cdot Y) \cdot \det(X - i \cdot Y).$$

Mai mult, $X - i \cdot Y = \overline{X - i \cdot Y}$, deci $\det\left(X^2 + Y^2\right) = \left|\det(X + i \cdot Y)\right|^2 \geq 0$.

2. a) Se folosește definiția elementului neutru.

b) Deoarece $\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(4) = 1 \end{cases}$, obținem $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ și se verifică apoi faptul că funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 3$ este izomorfismul căutat.

c) Se demonstrează prin inducție că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2008 ori } x} = (x-3)^{2008} + 3$.

Se obțin apoi soluțiile $x = 1$ și $x = 5$.

Varianta 3 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Avem ca $f'(x)=\dfrac{36\cdot x^2-1}{x}, x>0 \Rightarrow f$ este strict descrescatoare pe $\left(0,\dfrac{1}{6}\right]$ si strict crescatoare pe $\left[\dfrac{1}{6},\infty\right)$.

b) Din a) avem ca $f(x)\geq f\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{2}+\ln 6, \forall x>0$, deci $a\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}+\ln 6\right]$

c) Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$,utilizand a) avem ca pentru $m<\dfrac{1}{2}+\ln 6=m_0$ ec.are 0 radacini reale, pentru $m=m_0$ ec.are o radacina reala, iar pentru $m>m_0$ ec. are doua radacini reale.

2.a) Functia este continua deci are primitive.

Daca F este o primitiva pentru f_a ,atunci $F'(x)=f_a(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Asadar functia F este strict crescatoare pe $\mathbb{R}$.

b) Avem ca $\int_0^3 \dfrac{1}{|x-2|+3}dx=\int_0^2\dfrac{1}{5-x}dx+\int_2^3\dfrac{1}{x+1}dx=\ln\dfrac{20}{9}$.

c) Avem: $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f_a(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3\dfrac{1}{a-x+3}dx=\lim\limits_{a\to\infty}\ln\dfrac{a+3}{a}=0$.

Varianta 4 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţii

1. -1

2. $V\left(-\frac{5}{2},-\frac{21}{4}\right)$; $x_V, y_V < 0 \Rightarrow V \in C_{III}$

3. $3^x = y$; $y \in \left\{\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right\}$, $x \in \{-1,-1+2\log_3 2\}$

4. $9\cdot 9$ numere $\overline{aab}$; $9\cdot 9$ numere $\overline{aba}$, $9\cdot 9$ numere $\overline{baa}$; $p = 0,27$

5. $(3-2a)(2a+1)+2(a+1)=0$; $a \in \left\{\frac{3\pm\sqrt{29}}{4}\right\}$

6. $\frac{6\cdot 10\cdot \sin A}{2} = 15\sqrt{3}; \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos A = \frac{1}{2}$; $BC = 2\sqrt{19}$

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie:

1. a) Se arată că $rang\,(A) = 2$.

b) Calcul direct, sau, deoarece $rang\,(A^t\cdot A) \le rang\,(A) = 2$, rezultă că $\det(A^t\cdot A) = 0$.

c) $A\cdot A^t = 9\cdot I_2$, deci $\det(A\cdot A^t) = 81$.

2. a) Calcul direct.

b) Se arată că elementul neutru este $e = -1$.

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, evident $5x+6 \neq 0$.

x este simetrizabil $\Leftrightarrow$ $\exists\, x' \in \mathbb{Z}$, $xx' = x'x = -1$ $\Leftrightarrow$ $x' = -\frac{6x+7}{5x+6} \in \mathbb{Z}$, deci $5x' = -6 + \frac{1}{5x+6} \in \mathbb{Z}$,

aşadar $5x+6 \in \{-1,1\}$. Se obţine că unicul element simetrizabil în raport cu legea "$*$" este elementul neutru $e = -1$.

c) Din ecuaţie rezultă că x este inversabil şi din b) rezultă $x = -1$, care verifică relaţia.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $y=0$ asimptota orizontala la ∞ si la $-\infty$.

Dreptele $x=0, x=-1$ sunt asimptote verticale.

b)Avem ca $f'(x)=\dfrac{-2\left(3x^2+3x+1\right)}{x^3.(x+1)^3}<0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$,de unde se obtine concluzia.

c) . $\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ Limita ceruta este $\dfrac{1}{e}$

2.a) $I_1=\int_0^2\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=2-\ln 3.$

b) Avem ca $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}+\int_1^2\dfrac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^1 x^n dx+\int_1^2 1dx=\dfrac{1}{n+1}+1.$

c)Avem ca $0\le\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 0\le\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx\le\dfrac{1}{n+1}$,deci $J_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx$,are limita egala cu 0.Cum $I_n=J_n+\int_1^2\dfrac{x^n}{1+x^n}dx=J_n+\int_1^2\left(1-\dfrac{1}{1+x^n}\right)dx=J_n+1-c_n$,si c_n are limita egala cu 0,deducem ca limita ceruta este egala cu1.

Varianta 5 - rezolvari mate MT1

Soluții

1. $\frac{2}{5}$

2. $x \in \left[5-\sqrt{13}, 5+\sqrt{13}\right]$ **;** $x \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$

3. $f^{-1}:(0,\infty) \to (1,\infty), f^{-1}(x) = x+1$

4. Numărul căutat e dat de numărul funcțiilor $g:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$; $4^3 = 64$ funcții

5. E centrul paralelogramului $E(3,3)$; $\frac{x_B + x_D}{2} = 3, \frac{y_B + y_D}{2} = 3$ **;** $D(-1,10)$

6. $\frac{AC}{\sin B} = 2R$ **;** $AC = \sqrt{3}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

1. a) Se arată că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0$, deci punctele A, B, C sunt coliniare.

b) Între linii există relația $L_3 = 6L_1 - 2L_2$. Rangul este 2.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, deci $\operatorname{rang}(M) \geq 2$.

Dacă unul dintre minorii de ordinul trei ai lui M care conțin ultima coloană este nul, atunci punctul $D(a,b)$ este coliniar cu două dintre punctele A, B și C.
Din a) rezultă că punctele A, B, C, D sunt coliniare, deci toți ceilalți minori de ordinul 3 ai matricei M sunt nuli. Așadar $\operatorname{rang}(M) = 2$.

2. a) $4 \circ 5 \circ 6 = 9$.

b) Se demonstrează că funcția f este bijectivă și $\forall\, x, y \in (0,\infty)$, $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$.

c) Fie $q \in \mathbb{Q}$, $q > 3$. Atunci, există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $q = 3 + \frac{m}{n}$.

$\forall\, t \in \mathbb{N}^*$, avem $k = 3 + t \in H$ și deoarece H este subgrup al lui G, rezultă că și simetricul $k' = \frac{1}{t} + 3 \in H$.

Deci $m+3, \frac{1}{n} + 3 \in H$, de unde și $(m+3) \circ \left(\frac{1}{n} + 3\right) = \frac{m}{n} + 3 = q \in H$.

Varianta 5 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x) == \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x\cdot(x+1)^2}, x > 0$

b) Convine $f'(x) = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 20x - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)\left(x^2 - 2x + 9\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Deoarece $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}; -\ln 2 + \frac{2}{3}\right)$ este punctul cautat.

c) Din subpunctul a) deducem ca $f'(x) > 0, \forall x > 1, f'(1) = 0$ Deoarece functia f este strict crescatoare pe $[1,\infty)$ si $f(1) = 0$,rezulta ca $f(x) \geq 0, \forall x \in [1;\infty)$,de unde se deduce inegalitatea de demonstrat.

2.a) Se arata ca f este strict descrescatoare
Se aplica teorema de medie (sau teorema lui Lagrange pentru o primitiva a functiei f).

b) $\int_1^n f(x)dx = \int_1^n x^{-2}dx = \left.\frac{-1}{x}\right|_1^n = 1 - \frac{1}{n}$ .Atunci limita ceruta este egala cu 1.

c) Deoarece $\int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx$ sumand inegalitatile de la a) obtinem:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \Rightarrow a_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \Rightarrow a_n \leq \int_1^n f(x)dx + 1 \to 2,$$

deci sirul este marginit superior.Sirul fiind si crescator ,este convergent.

Varianta 6 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. 495
2. $f(x) = ax^2 + bx + c; a - b + c = 1, c = 1, a + b + c = 3$ **;** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$
3. $\cos 2x \sin x = 0$ **;** $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
4. $A_4^3 = 24$
5. $AB = \sqrt{17}, BC = 2\sqrt{17}, AC = 5; \cos B = \frac{15}{17}$
6. $R = \frac{c}{2\sin C}$ **;** $R = 6$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Se arată că $\sigma^4 = \sigma$.

b) Dacă $\sigma = e$, pentru $p = 1$ avem $\sigma^p = e$.

Dacă $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$, atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $\sigma, \sigma^2, ..., \sigma^k \in S_n$.

Cum mulțimea S_n este finită, rezultă că există $i, j \in \mathbb{N}^*$, cu $i < j$, astfel ca $\sigma^i = \sigma^j$.

Obținem că pentru $p = j - i \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^p = e$.

c) Fie $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \neq e$. Se arată că $\tau^4 = e$, deci $\tau^5 = \tau$.

2. a) Se arată că soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{1, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

b) Utilizând relațiile lui Viète obținem $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

Dacă ecuația ar avea mai mult de o rădăcină reală, deoarece ea are coeficienți reali, ea ar avea toate rădăcinile reale. Deoarece $S = 0$, obținem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, fals.

c) Utilizând relațiile lui Viète, obținem $\Delta = (x_1 + x_2 + x_3)\left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\right) = -4$.

Varianta 6 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x)=e^{x\ln x}.(x\ln x)'=f(x)\cdot(\ln x+1), x>0$.

b) Functia f este descrescatoare pe $\left(0;\frac{1}{e}\right]$ si crescatoare pe $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$, deci ea este marginita inferior de numarul $f\left(\frac{1}{e}\right)$.Minimul cerut este $e^{\frac{-1}{e}}$.

c) $f''(x)=f(x)\cdot\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)>0$,deci f este convexa pe $(0,\infty)$.

2.a) $\int_0^1 g_2(x)dx=\int_0^1\left(1-x+x^2-x^3+\frac{x^4}{1+x}\right)==\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$

b) $x\in[0;1]\Rightarrow 0\le\frac{x^{2n}}{1+x}\le x^{2n}$ si integrand aceste inegalitati de la 0 la 1 ,obtinem inegalitatile cerute.

c) Integrand functia g_n obtinem:

$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-x+x^2-...-x^{2n-1}+\frac{x^{2n}}{1+x}\right)dx\Rightarrow\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2n}+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$, utilizand si b) gasim ca limita este $\ln 2$.

Varianta 7 - rezolvari mate MT1

Soluţii

1. 1

2. $\max f = -\frac{\Delta}{4a}$ **;** $\max f = 0$

3. $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$ **;** $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ **;** $x \in \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. $C_n^2 = 120$ **;** $n = 16$

5. $ABDC$ parallelogram ; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; $AD = CB$; $ABDC$ dreptunghi ; $A = \frac{\pi}{2}$

6. triunghiul este dreptunghic; $S = 6,\ p = 6$ **;** $r = 1$

Soluţie

1. a) Se arată că $\operatorname{rang}(A) = 3$.

b) Se arată uşor că mulţimea soluţiilor este $S = \{(0, \alpha, 1-2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$.

c) Presupunem că sistemul are soluţia $X = (x \quad y \quad z) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$. Se obţine sistemul $\begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 4x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$.

Sistemul omogen format din primele trei ecuaţii are doar soluţia $x = y = z = 0$, care nu verifică a patra ecuaţie a sistemului, contradicţie.

2. a) Calcul direct.

b) Din a) rezultă că „$\cdot$" este lege de compoziţie pe H_t.

Deoarece pentru $t \in \mathbb{Z}$, simetrica din grupul $(G, \cdot)$ a matricei $A(k \cdot t - 1)$ este matricea $A(-k \cdot t - 1)$, se arată că $\forall\, h, k \in \mathbb{Z}$, $A(h \cdot t - 1) \cdot A(-k \cdot t - 1) \in H_t$.

c) Fie funcţia $f : G \to (0, \infty)$, $f(A(k)) = k + 1$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Se demonstrează că f este bijectivă şi că este un morfism de grupuri.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $x=0$ este asimptota verticala.Functia f nu admite alte asimptote

b) Aplica T.Lagrange functiei f pe $[k,k+1]$ si stabileste inegalitatile cerute.

c) Sumeaza inegalitatile de la a) si obtine $x_n > \ln(n+1)-\ln n>0, n\in\mathbb{N}^*$.

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$ si folosind a) se deduce ca sirul este descrescator.

2.a) Convine $F'(x)=f(x), \forall x>-1$,

adica $\frac{a}{x+1}+\frac{2bx}{x^2+1}+\frac{c}{x^2+1}=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}, \forall x>-1$

sau $a+2b=0, 2b+c=2, a+c=0$, de unde $a=-1, b=\frac{1}{2}, c=1$.

b) Avem: $\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=\left(-\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+arctg(x)\right)\Big|_0^1==$

$-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$.

c) Avem ca $F'(x)=f(x), x>-1$ Stabileste ca $F'(x)<0, x\in(-1;0), F'(x)>0, x>0$ si deduce monotonia.

Varianta 8 - rezolvari mate MT1

Soluții

1. $z^2+z+1=0 \Rightarrow z^3=1$ **;** $z^4+\dfrac{1}{z^4}=z+\dfrac{1}{z}=-1$**;**

2. $f(1)=2,\ f(0)=3$**;** $c=3$**,** $a=-2$

3. $\sqrt[3]{7x+1}=x+1$**;** $x^3+3x^2-4x=0$ **;** $x\in\{-4,1,0\}$

4. A_5^4 **=**120

5. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}$ **;** $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}$ **;** $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{AF}$; A, F, C coliniare

6. $p=21$ **,** $S=84$**;** $\dfrac{56}{5}$**.**

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $\det(A)=-4$.

b) Calcul direct.

c) Se arată că $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-I_3)$ deci $A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

2. a) Folosind relațiile lui Viete, se arată că $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)=-a$.

b) $x_1=2 \Rightarrow a=-6$. Celelalte rădăcini sunt soluțiile ecuației $x^2+2x+3=0$, deci $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{2}\cdot i$.

c) $a=0$ este soluție.

Pentru $a\neq 0$, din primele două relații ale lui Viète rezultă $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1x_2+(x_1+x_2)\cdot x_3=-1\end{cases}$.

Se obține $x_1^2+x_1x_2+x_2^2-1=0$. Din $\Delta_{x_1}\geq 0$ și $x_2\neq 0$ rezultă $x_2^2=1$.

Rezultă $x_3=0$, fals. Așadar $a=0$ este unica soluție.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Avem că $f'(x)=1-\sin x\geq 0$ şi derivata nu se anuleaza pe o multime care e interval , deci are loc concluzia.

b) Se demonstreaza prin inductie matematica ca $x_n \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

c).Arata ca sirul este crescător .

. Deduce folosind si b) ca sirul este convergent. Arata ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

2.a) $I_1=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\left(\cos x-1\right)dx\leq 0$,de unde se obtine concluzia.

c) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cdot\cos^{n-1}xdx$; $I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\cos^{n-2}xdx$; $I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$,deci

$I_n=\frac{n-1}{n}.I_{n-2}$.

Se motiveaza ca $I_n\neq 0$. Inmultind relatiile anterioare obtinem $I_3\cdot I_4\cdot\ldots\cdot I_n=\frac{2}{3}I_1\cdot\frac{3}{4}\cdot I_2\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ şi se deduce relatia ceruta.

Relatia ceruta se poate stabili si prin inductie matematica dupa ce se gaseste relatia de recurenta.

Varianta 9 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $z \in \{\pm 3i\}$

2. $\Delta \geq 0$ **;** $a \in \left(-\infty, \frac{9-2\sqrt{19}}{5}\right] \cup \left[\frac{9+2\sqrt{19}}{5}, \infty\right)$

3. $4x \in \{0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi\}$ **;** $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

4. numărul cerut coincide cu numărul funcțiilor $g: \{1,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$; $5^4 = 625$ funcții

5. $p = 21$ **;** $S = 84$ **;** $r = 4$

6. $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$ **;** $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Se arată că $A^4 = -4 \cdot I_2$.
b) Se demonstrează prin calcul direct.
c) Se demonstrează că

$\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $A^{4k} = (-4)^k \cdot I_2$, $A^{4k+1} = (-4)^k \cdot A$, $A^{4k+2} = (-4)^k \cdot A^2$ și $A^{4k+3} = (-4)^k \cdot A^3$.

Folosind punctul b) și forma matricelor A, A^2, A^3, deducem concluzia.

2. a) Pentru $x \in \mathbb{C}$, notăm $x^2 = t$. Ecuația $2t^2 + 3t - 5 = 0$ are soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = -\frac{5}{2}$.

Rădăcinile polinomului f sunt $x_{1,2} = \pm 1$ și $x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot i$.

b) Concluzia rezultă folosind relațiile lui Viète și faptul că suma căutată este egală cu

$$S = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 8(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

c) Dacă $a = 4$, atunci, din **b)** obținem că rădăcinile lui f sunt egale. Folosind prima relație a lui Viète, deducem că $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -\frac{1}{2}$. Găsim apoi $b = 1$ și $c = \frac{1}{8}$.

Varianta 9 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Avem ca $f'(x)=1-\cos x \geq, x\in \mathbb{R}$ si f nu se anuleaza pe o multime care sa fie interval. Asadar,functia f este strict crescatoare pe $\mathbb{R}$.

b) Din ipoteza rezulta ca $x_n=\sin x_n+n$. Arata ca $x_n\geq n-1$ Rezulta ca sirul (x_n) este nemarginit deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)=\infty$.

c) Avem ca $\frac{x_n}{n}\in\left[\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n}\right]$ Limita ceruta este egala cu 1 (teorema clestelui).

2.a) Avem : $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-x^n}{1-x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)dx=\left(x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=a_n$.

b) Avem ca $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow 0\leq g_n(t)\leq g_n\left(\frac{1}{2}\right)$

Atunci rezulta ca $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(t)dt\leq\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2^{n-1}}dt=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}^*$.

c) Sirul care ne intereseaza este notat a_n .Avem ca $a_n=-\ln(1-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)dx\to-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $z \in \{\pm 2i\}$

2. $f(x) = ax + b, a \neq 0$ **;** $f(f(x)) = a^2 x + ab + b$ **;** $2f(x) + 1 = 2ax + 2b + 1$ **;** $f(x) = 2x + 1$

3. $\lg \frac{x+1}{9} = \lg \frac{10}{x}$ **;** $x = 9$

4. $T_{k+1} = C_{10}^{k} \cdot 3^{10-k} \cdot 3^{\frac{k}{3}}$ **;** $k \vdots 3 \Rightarrow k \in \{0,3,6,9\}$

5. $(a-2)(2a-20) - 8 \cdot 3 = 0$ **;** $a \in \{6 \pm 2\sqrt{7}\}$.

6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ **;** $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-2}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{13}}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Se arată că $\alpha^3 = e$.

b) Ecuația devine $\alpha \cdot x = e$, cu unica soluție $x = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Fie $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6$ produsul căutat, cu o ordonare oarecare a factorilor.

$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2) \cdot \varepsilon(\sigma_3) \cdot \varepsilon(\sigma_4) \cdot \varepsilon(\sigma_5) \cdot \varepsilon(\sigma_6) = (-1)^{m(\sigma_1)+m(\sigma_2)+m(\sigma_3)+m(\sigma_4)+m(\sigma_5)+m(\sigma_6)} = -1$,
deci $\sigma \neq e$.

2. a) Se verifică prin calcul direct.

b) Numărul 5 fiind prim, $\forall k \in \{1,2,3,4\}$, numărul $\alpha_k = C_5^k$ este divizibil cu 5, deci $\widehat{\alpha_k} = \hat{0}$.

Pentru $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$ și $a \in \mathbb{Z}_5$, $(A(a))^5 = (a \cdot I_2 + B)^5$ $a^5 \cdot I_2 + B^5 = a \cdot I_2 + B^4 \cdot B = a \cdot I_2 + B = A(a)$.

c) Pentru $a \in \mathbb{Z}_5$, avem $(A(a))^5 = A(a)$. Prin inducție se deduce că $\forall k \in \mathbb{N}$, $(A(a))^{5^k} = A(a)$.

Obținem că $\forall a \in \mathbb{Z}_5$, $(A(a))^{2008} = (A(a))^4$. Cum $(A(a))^{2008} = A(a)$, rezultă $(A(a))^4 = A(a)$.

Din punctul a) avem $(A(a))^5 = A(a)$ și deducem $(A(a))^2 = A(a)$. Se obține $a = \hat{3}$.

Varianta 10 - rezolvari mate MT1

<u>Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului</u>
<u>Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar</u>

Soluţii

1.a) $f'(x) = arctgx - \frac{x}{x^2+1}$; $f''(x) = \frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \geq 0$,deci f este convexa.

b) $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'$ este crescatoare Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \frac{\pi}{2}$,
se obţine concluzia.

c) $f'(0) = 0$ si f' crescatoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \leq 0, x < 0; f'(x) \geq 0, x > 0$ Deducem ca $x = 0$
este punct de minim pentru f,deci $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$

b) $x \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n$
Integreaza inegalitatile anterioare si obtine cerinta problemei .

c)Avem ca $I_n \geq 0$ deoarece functia de integrat este pozitiva.Folosind b) si teorema clestelui se deduce ca limita ceruta este egala cu 0.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $a^2 = 2b$; $a + 2 = 2 \cdot 17$; $a = 32, b = 512$

2. $-3(-3x+2)+2=0$; $x = \dfrac{4}{9}$

3. $tg(-x) = -tgx$ **;** $tgx = 1$ **;** $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

4. 4 functii

5. $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \dfrac{\overrightarrow{AE}}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$

6. $C = \dfrac{7\pi}{12}$ **;** $\sin C = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **;** $R = \dfrac{c}{2\sin C}$ **;** $R = 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) $\det(A) = 4$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) $A \neq 0_4 \iff$ cel puțin unul dintre numerele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ este nenul $\iff$

$\iff \alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$**.** Folosind unicitatea inversei, deducem că $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} \cdot A^t$.

2. a) $|a| = |-a| = |x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 3$.

b) $f(0) = c < 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Funcția polinomială asociată lui f este continuă pe $(0, \infty)$, deci ea (și polinomul f) are cel puțin o rădăcină în $(0, \infty)$.

c) $x_1x_2x_3 = 1$, de unde rezultă $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$.

Deoarece $c = -1 < 0$, din punctul **b)** rezultă că f are rădăcina $x_1 \in (0, \infty)$.

Cum $|x_1| = 1$, obținem $x_1 = 1$.

Folosind relațiile lui Viète, obținem $x_2 = x_3 = -1$ și apoi $b = -1$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Avem ca $f_s'(0)=-\frac{3}{4}$ şi $f_d'(0)=\frac{1}{4}$,deci f nu e derivabila in x=0.

b) $f'(x)=\begin{cases} -\frac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2}, x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0) \\ \frac{e^{x}(x+1)}{(x+2)^2}, x\in(0,\infty) \end{cases}$; $x=-3$ este maxim şi $x=0$ este minim.

c) Utilizează şirul lui Rolle:

pentru $m<-e^3 \Rightarrow 2$ răd.;

$m=-e^3 \Rightarrow 1$ rad($x=-3$);

$m\in\left(-e^3,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 0$ răd.;

$m=\frac{1}{2}\Rightarrow 1$ răd. ($x=0$);

$m>\frac{1}{2}\Rightarrow 2$ răd.

2.a) $I=1-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^4}{384}$.

b)Avem ca $g'(x)=\frac{-\sin x}{x}<0,\forall x\in(0,1]$,deci are loc cerita problemei.

c) Deduce ca $\frac{\sin t}{t}\geq 1-\frac{t^2}{6}, t>0$

Integrează relația anterioară între x şi 1 obtine ca $g(x)\geq\frac{17}{18}-x+\frac{x^3}{18}$

Atunci ,limita ceruta $L\geq\frac{17}{18}>0,9.$

Varianta 12 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $r=2$ **;** $a_1=2$ **;** $S=420$

2. $\dfrac{2x^2+8x+7}{x^2+5x+6}=\dfrac{7}{6}$ **;** $x\in\left\{-\dfrac{13}{5},0\right\}$

3. $2x=\pm\arccos\dfrac{1}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **;** $x\in\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right\}$

4. $T_7=C_{12}^6\cdot\sqrt{a}$ **;** $a=4$

5. $m_d=\dfrac{2}{3}, m_{d'}=\dfrac{2}{3}$ **;** $M'=s_A(M)\Rightarrow M'(-7,7)$ **;** $y-7=\dfrac{2}{3}(x+7)$ **;** $d':2x-3y+35=0$

6. $\dfrac{4}{3}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Calcul direct
b) Se demonstrează prin calcul direct, ținând cont de faptul că
$\forall\, k\in\{1,2\}$, $x_k\cdot g(x_k)=a\cdot x_k^3+b\cdot x_k^2+c\cdot x_k=a+b\cdot x_k^2+c\cdot x_k$ și
$x_k^2\cdot g(x_k)=a\cdot x_k^4+b\cdot x_k^3+c\cdot x_k^2=a\cdot x_k+b+c\cdot x_k^2$.
c) Din **b)** se obține $\det(A)=g(1)\cdot g(x_1)\cdot g(x_2)$.
$\det(A)=0 \iff$ cel puțin unul dintre numerele $1, x_1, x_2$ este rădăcină și pentru g.
Obținem $a+b+c=0$ sau $a=b=c$.
2. a) $f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{0}$.
b) Cum f nu e injectivă, iar domeniul său este o mulțime finită și coincide cu codomeniul, rezultă că f nu este surjectivă.
c) Singurele rădăcini ale polinomului sunt $x_1=\hat{0}$ și $x_2=\hat{1}$.
Descompunerea în factori ireductibili a polinomului peste $\mathbb{Z}_5$ este $X^4+\hat{4}X=X(X+\hat{4})(X^2+X+\hat{1})$.

Varianta 12 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Se considera functia $g(x)=x-(x+1)\cdot\ln(x+1)$

Calculeaza $g'(x)=1-\ln(x+1)-1=-\ln(x+1)$ Se arata ca g este strict descrescatoare pe $(0;\infty)$, $g_d(0)=0 \Rightarrow g(x)<0, \forall x>0$.

b) Scrie $f(x)=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ si calculeaza limita exponentului. Limita ceruta este egala cu 1.

c) $f'(x)=f(x)\cdot\dfrac{g(x)}{x^2\cdot(x+1)}$,unde g a fost definita mai sus.Cum $f'(x)<0, \forall x>0 \Rightarrow f$ strict descrescatoare.

2.a) Integrând prin părți se obține $f(2)=1-\dfrac{2}{e}$.

b) Avem: $f(1)=1-\dfrac{1}{e}\le 1$.Daca $x>1$,atunci $f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt \le \int_0^1 t^{x-1}dt=\dfrac{1}{x}$.

c) $f(x+1)=\int\limits_0^1\left(-e^{-t}\right)'\cdot t^x dt==-e^{-t}\cdot t^x\Big|_0^1+\int\limits_0^1 e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}dt==-\dfrac{1}{e}+x\cdot f(x), x>1$.

Varianta 13 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)^2 = -2 \pm 2\sqrt{3}i$

2. x, y sunt radacinile ecuatiei $a^2 - 4a + 3 = 0$ **,** $a \in \{1,3\}$ **;** $(x, y) \in \{(1,3), (3,1)\}$

3. $6\sqrt{x+2} = x + 6$ **;** $x^2 - 24x + 108 = 0$ **;** $x \in \{6,18\}$

4. $T_{k+1} = C_9^k x^{18-3k}$ **;** $T_7 = 84$

5. $d' \perp d, d' : 4x + 3y - 12 = 0$ **;** $d' \cap d = \{A'\}, A'\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ **;** $d(A,d) = 2$

6. $\cos B = \frac{1}{8}$ **,** $\cos C = \frac{3}{4}$ **,** $\cos 2C = \frac{1}{8}$ **;** $\cos B = \cos 2C \Rightarrow B = 2C$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta = 2 \cdot (1 - m)$.

Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ sistemul este compatibil determinat.

b) Pentru $m = 1$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ și $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil.

c) Dacă $m = 1$, sistemul are mulțimea soluțiilor $S_1 = \left\{(x, 1, 2 - x) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ și

$x^2 + 1^2 + (2 - x)^2 = 2x^2 - 4x + 5$.

Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 5$ are minimul $g(x_V) = g(1) = 3$.

2. a) Calcul direct.

b) Dacă $X, Y \in G$, $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y) = 1$, deci $X \cdot Y \in G$.

Se verifică că dacă $X \in G$, atunci și $X^{-1} \in G$.

c) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 + D$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deoarece $D^2 = 0_2$, obținem $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C^n = (-1)^n \cdot I_2 + n \cdot (-1)^{n-1} \cdot D \neq I_2$.

Varianta 13 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $y = x + 1$ este asimptota oblică spre ∞.

b) Motiveaza ca f este derivabila pe $\mathbb{R} - \{-2;1\}$

Scrie formula $f'(x) = \dfrac{\left(x^3 + 3x^2 - 4\right)'}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(x^3 + 3x^2 - 4\right)^2}}$ si deduce relatia ceruta.

c) $f'(x) = \dfrac{3x(x+2)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)^4}} = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}, x \neq 1, x \neq -2$ Arata ca $f_s'(-2) = +\infty, f_d'(-2) = -\infty$.

2.a) $F_1(x) = \int_0^x \left(-e^{-t}\right)' \cdot t dt = 1 - (x+1) \cdot e^{-x}$.

b) $F_n'(x) = x^n \cdot e^{-x}, x > 0$; $F_n''(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot e^{-x} = x^{n-1} \cdot e^{-x}(n - x), x > 0$, de unde $x = n$ este punct de inflexiune.

c) $F_2(x) = \int_0^1 e^{-t} t^2 dt = \dfrac{-x^2}{e^x} - \dfrac{2x}{e^x} - \dfrac{2}{e^x} + 2$,de unde rezulta ca limita ceruta este egala cu 2.

Varianta 14 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot...\cdot\frac{99}{100}\right)=\lg\frac{1}{100}=-2$

2. $ax^2+2(a+1)x+2a-1<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a<0,\Delta<0$ **;** $a\in\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$

3. $x=\frac{1}{3}$

4. $C_n^2=45$ **;** $n=10$

5. $m_{AB}=-\frac{1}{7}$ **;** $y-3=-\frac{1}{7}(x-2)$ **;** $x+7y-23=0$

6. $\frac{AC}{\sin B}=2R$ **;** $B=\frac{\pi}{3}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $rang\,(A)=1$.

b) Se arată că $A^2=d\cdot A$, cu $d=a+2b+3c$.

c) Se verifică că pentru $K=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ și $L=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}$, avem $A=K\cdot L$.

2. a) Calcul direct.

b) Rădăcinile ecuației $t^2-4t+16=0$ sunt $t_{1,2}=2\pm2\sqrt{3}\cdot i$.

Mulțimea rădăcinilor lui f este $\left\{\sqrt{3}+i,\sqrt{3}-i,-\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}-i\right\}$.

c) Singura descompunere în factori a polinomului, în $\mathbb{R}[X]$, este $f=\left(X^2-2\sqrt{3}X+4\right)\left(X^2+2\sqrt{3}X+4\right)$.

Nici unul dintre polinoamele $X^2-2\sqrt{3}X+4$ și $X^2+2\sqrt{3}X+4$ nu poate fi descompus în $\mathbb{Q}[X]$.

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) $f_n'(x) = n \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x$ .Utilizand regula de derivare a unui produs ,se obtine relatia ceruta.

b)

$$f_n''(x) = n \cdot \sin^{n-2} x \cdot \left(n-1-n\sin^2 x\right);\ f_n''(x_n) = 0, x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow n.\sin^2 x = n-1 \Rightarrow \sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

c) $L = \lim_{n\to\infty} (\sin x_n)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\sin x_n - 1\right)^{\frac{1}{\sin x_n - 1}\cdot n\cdot(\sin x_n - 1)}$; $L = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-1\right)\cdot n} = e^{-\frac{1}{2}}$.

2.a) Se motiveaza ca F este derivabila pe $\mathbb{R}$ $F'(x) = \frac{(2x+a)\left(x^2+1\right)-\left(x^3+ax^2+5x\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$

$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$,deci are loc concluzia

. b) Aria $= \int_1^2 f(x)dx = \left.\frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}\right|_1^2 = \frac{13}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{2}}$.

c) Cu schimbarea $t = -x$,a doua integrala devine $\int_{-2}^0 F(x)dx = \int_0^2 F(-t)dt$.

Relatia din ipoteza devine

$$\int_0^2 F(x) - F(-x)\,dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 \frac{2ax}{\sqrt{x^2+1}}dx = 2 \Leftrightarrow a \cdot \left.\sqrt{x^2+1}\right|_0^2 = 1 => a = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)=\log_3 18$ **;** 2

2. $f(x)=ax^2+bx+c,\ f(0)=2$ **,** $f(1)=0$ **,** $\Delta=0$ **;** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-4x+2$

3. $tgx=-1;\ x\in\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$

4. Numărul cerut este dat de numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,3,5,7,9\}$; $5^4=625$

5. $m_{CD}=\frac{4}{3}$ **;** $y-2=\frac{4}{3}(x+2)$ **;** $4x-3y+14=0$

6. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ **;** $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Notăm cu A matricea sistemului.
Prin calcul direct se obține $\det(A)=a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-3abc\right)$.

b) $\det(A)\neq 0$, deci sistemul are soluție unică.

c) Adunând cele trei ecuații ale sistemului, obținem $(a+b+c)(x+y+z)=3 \iff 0=3$, fals.

2. a) Folosind relațiile lui Viete, se obține $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=0$.

b) Notând $x^2=t$ obținem ecuația $t^2-5t+5=0$, cu soluțiile $t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}>0$, deci ecuația inițială are toate rădăcinile reale.

c) Dacă $\operatorname{grad}(g)>4$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|=+\infty$, dar din ipoteză rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\le 1$, contradicție.

În consecință, $\operatorname{grad}(g)\le 4$. Din ipoteză deducem că $\forall k\in\{1,2,3,4\}$, $\left|g(x_k)\right|\le\left|f(x_k)\right|=0$, deci $\left|g(x_k)\right|=0$, de unde rezultă $g(x_k)=0$, adică $g=a\cdot f$, cu $a\in\mathbb{R}$. Înlocuind în relația din enunț, obținem că $|a|\le 1$. Așadar, soluțiile sunt polinoamele $g=a\cdot f$, cu $a\in[-1,1]$.

Varianta 15 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f_n'(x) = n \cdot \left(x^{n-1} - 1\right), x \geq 0$ $f_n'(1) = 0; f_n'(x) < 0, x \in [0,1); f_n'(x) > 0, x > 1$,de unde rezulta concluzia.

b) f_n este continua, strict descrescatoare pe $[0,1]$ si $f_n(0) \cdot f_n(1) < 0 \Rightarrow$ o rad.in $(0,1)$

f_n este continua,strict cresc. pe $[1,\infty)$, $f_n(1) < 0, \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \infty \Rightarrow$ o rad.in $(1,\infty)$.

c) $f_n\left(\frac{2}{n}\right) < 0, f_n(0) > 0$,deci $a_n \in \left(0, \frac{2}{n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.a) $I_0 = arctgx\Big|_0^1$,deci $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

b) $I_{2n} + I_{2n-2} = \int_0^1 \frac{x^{2n-2} \cdot \left(x^2+1\right)}{x^2+1} dx$; $I_{2n} + I_{2n-2} = \frac{1}{2n-1}, n \geq 2$.

c) Dem. prin inductie (sau foloseste b)): $I_{2n} \cdot (-1)^{n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} - I_0$. Arata ca $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ si apoi ca limita ceruta este I_0.

Varianta 16 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. 1

2. $x^2 + ax + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ **;** $\Delta \leq 0$ **;** $a \in \left[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right]$

3. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$

4. $8!(n-8)! = 10!(n-10)!$**;** $n^2 - 17n - 18 = 0$ **;** $n = 18$

5. $AB = 5$**,** $BC = 4$**,** $CA = \sqrt{41}$ **;** $B = \frac{\pi}{2}$

6. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$**;** $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Dacă $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a, a' \in (0, \infty)$ și $b, b' \in \mathbb{R}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} a \cdot a' & a \cdot b' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $a \cdot a' \in (0, \infty)$, $a \cdot b' + b \in \mathbb{R}$.

b) De exemplu, pentru $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se arată că $CD \neq DC$.

c) Se arată că $I_2 - A + A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $\alpha = 1 - a + a^2 > 0$.

Obținem $I_2 - A + A^2 - ... + A^{2008} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, deoarece $x = \frac{1 + a^{2009}}{1 + a} > 0$ și $y \in \mathbb{R}$.

2. a) Utilizând eventual relațiile lui Viète, se obține că $a = 0$, $b = -3$ și $c = 2$.

b) Dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci $2a + c + (b+2) \cdot \sqrt{2} = 0$, de unde rezultă $b = -2$ și $c = -2a$.

Apoi, $f = X^3 + aX^2 - 2X - 2a = (X + a)(X^2 - 2)$, cu rădăcina rațională $x_1 = -a$.

c) Presupunem că f are rădăcina $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că există $q \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $f = (X - k) \cdot q$. Mai mult, coeficienții lui q sunt numere întregi. Folosind ipoteza, obținem că numerele $(-k) \cdot q(0)$ și $(1-k) \cdot q(1)$ sunt impare, ceea ce este fals, deoarece $(-k)(1-k)$ este un număr par.

Varianta 16 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Motiveaza ca f este derivabila pe $\mathbb{R}-\{0\}$ $f'(0)=\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$,deci are loc cerinta.

b) $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), x\in\mathbb{R}-\{0\}$ Limita ceruta este egala cu 0.

c)Cum $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ va exista un numar $\alpha>0$,astfel incat $f(x)\in(0,2),\forall x>\alpha$ .Functia f fiind continua pe $[0,\alpha]$,va fi marginita pe acest interval,deci f este marginita pe $[0,\infty)$.Deoarece f este o functie para ,va rezulta concluzia.

2.a) $\int_0^1 (1-x)^2 dx = \left.\frac{-(1-x)^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$

b)Cu substitutia $1-x=t$,se obtine $\int_0^1 x(1-x)^n dx = \int_0^1 \left(t^n - t^{n+1}\right)dt = \left.\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right)\right|_0^1$,de unde rezulta cerinta.

c) $\int_0^1 \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = -n.\left.\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{-n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\frac{n}{n+1}$,de unde rezulta ca limita ceruta este egala cu $1-\frac{1}{e}$.

Soluţii

1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=-8$ **;** 0

2. $x^2-x+2-y=0$ **;** $\Delta\geq 0$ **;** $\operatorname{Im} f=\left[\frac{7}{4},+\infty\right)$

3. $x=-12$

4. $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$

5. $m_d=\frac{5}{4}$ **;** $d':y-1=-\frac{4}{5}(x-1)$ **;** $4x+5y-1=0$

6. $AC=6\sqrt{2}$ **;** $BC=3\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ **;** $P=3\left(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

Soluţie:

1. a) Prin calcul direct, rezultă $A^2-B^2=0_2$.

b) Se arată că $I_2+A+A^2+A^3+A^4=I_2+2\cdot\left(A+A^2\right)=\begin{pmatrix}5&6\\0&1\end{pmatrix}$,

Atunci, $\det\left(I_2+A+A^2+A^3+A^4\right)=5$.

c) Pentru $n\in\mathbb{Z}$ oarecare, fie $X_n=\begin{pmatrix}1&n\\0&-1\end{pmatrix}$. Se arată că $X_n^2=I_2$.

2. a) Restul căutat este polinomul $r=2X+3$.

b) Avem $f=\left(X-x_1\right)\cdot\left(X-x_2\right)\cdot\left(X-x_3\right)\cdot\left(X-x_4\right)$, deci $\left(1-x_1\right)\cdot\left(1-x_2\right)\cdot\left(1-x_3\right)\cdot\left(1-x_4\right)=f(1)=5$.

c) $g\left(x_1\right)\cdot g\left(x_2\right)\cdot g\left(x_3\right)\cdot g\left(x_4\right)=\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1-x_3\right)\left(1-x_4\right)\left(-1-x_1\right)\left(-1-x_2\right)\left(-1-x_3\right)\left(-1-x_4\right)$,

deci $g\left(x_1\right)\cdot g\left(x_2\right)\cdot g\left(x_3\right)\cdot g\left(x_4\right)=f(1)\cdot f(-1)=5$.

Varianta 17 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Se dem. prin inductie.

b) $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n^5-x_n}{4}$. Demonstreaza ca $x_{n+1}-x_n<0$. Sirul fiind descrescator si marginit este convergent**.**

c) Avem ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^4+3}{4}=\dfrac{3}{4}$.

Din $\dfrac{x_{n+2}}{x_n}=\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\cdot\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ si relatia anterioara, se deduce ca limita ceruta este $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

2.a) Aria ceruta este $A=\int_0^1 f_1(x)\,dx=arctgx\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$.

b) $I=\int_0^1\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(1+x^2\right)'\left(1+x^2\right)^{-2}dx=\dfrac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{4}$.

c) Sirul ce ne intereseaza se scrie $a_n=n\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+k^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{k^2}{n^2}}$

Arata ca $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$.

Varianta 18 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $x \in \{1 \pm i\sqrt{3}\}$

2. $\Delta = 1$, $\min f = -\frac{1}{4}$

3. $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ **;** $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$ **;** $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $C_4^1 \cdot C_6^1$ cazuri favorabile cu un număr prim ; C_4^2 cazuri favorabile cu două numere prime ; C_{10}^2 cazuri posibile ; $p = \frac{2}{3}$

5. $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

6. $\overrightarrow{AB}(7,-7); \overrightarrow{AC}(4,-2); \overrightarrow{BC}(-3,5);\ -14$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Prin calcul direct, obținem $A^3 = 0_3$.

b) $I_3 + A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, deci $rang\left(I_3 + A + A^t\right) = 1$.

c) Se arată că $\left(I_3 + A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, sau prin calcul direct, sau observând că

$I_3 = I_3 + A^3 = \left(I_3 + A\right)\left(I_3 - A + A^2\right)$.

2. a) Se arată că mulțimea rădăcinilor lui f este $\{0, -4-2i, -4+2i\}$.

b) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -4a$ și $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 20$.

Suma din enunț este $S = 2S_1^2 - 6S_2 = 8\left(4a^2 - 15\right)$.

c) Deoarece $x_3 = x_4 = -a$, din prima relație a lui Viète obținem $x_1 = -2a$ și înlocuind în a doua relație a lui Viète rezultă $a \in \{-2, 2\}$.

Pentru $a = -2$, obținem $b = 2a^3 = -16$, iar pentru $a = 2$, obținem $b = 2a^3 = 16$.

Varianta 18 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Functia f este continua pe $[0,\infty)$,deci nu va avea asimptote verticale Cum $\lim_{x\to\infty} f(x)=2,$dreapta $y=2$este asimptota orizontala spre ∞.

b) Deoarece $f'(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0 \Rightarrow f$ strict crescatoare; $x_1=\dfrac{5}{4}<2$si presupunand $x_k>x_{k+1}$avem ca$x_{k+1}>x_{k+2} \Leftrightarrow f(x_k)>f(x_{k+1}) \Leftrightarrow x_k>x_{k+1}$ => adevarat deci sirul e descresc.

Arata ca $x_n \geq 0, n\geq 1$,deci sirul e convergent si folosind recurenta rezulta concluzia.

c) $y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-1$. Sirul (x_n)e descrescaror si are limita egala cu 1,deci $x_n\geq 1$
Obtine ca sirul (y_n)este crescator

$$|x_n-1|=|f(x_{n-1})-1|=\frac{|x_{n-1}-1|}{x_{n-1}+2}\leq\frac{|x_{n-1}-1|}{2}$$

Rezulta ca $|x_n-1|\leq\dfrac{x_0-1}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}$

Atunci $y_n\leq x_0+\sum_{k=1}^{n}|x_k-1|\leq 2+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}<3$,deci sirul e si marginit superior.

2.a) Avem ca $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx=(x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}+1.$

b) $F(x)=x\int_0^x(1+\cos t)dt=x^2+x\sin x$,de unde rezulta ca F este o functie para.

c) Daca $0\leq x_1<x_2\Rightarrow\int_0^{x_1}f(t)dt\leq\int_0^{x_2}f(t)dt$ caci f e pozitiva,deci F e cresc. pe $[0,\infty)$.Cum F este o functie para ,rezulta ca f este descrescatoare pe$(-\infty,0]$.

Varianta 19 - rezolvari mate MT1

Soluții

1. $(\sqrt{3})^{12} = 3^6$ **;** $(\sqrt[3]{5})^{12} = 5^4$ **;** $(\sqrt[4]{8})^{12} = 8^3$ **;** $\sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

2. $g(1) = 0$ **;** $f(x) = ax + b,\ f(1) = 0$ **;** $g(0) = 3 \Rightarrow f(2) = 3$ **;** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 3$

3. $3^x = y, 3y^2 - 30y + 27 = 0$ **;** $y \in \{1, 9\}$ **;** $x \in \{0, 2\}$

4. C_5^3 cazuri favorabile ; $p = \dfrac{1}{12}$

5. $A'(2, -1)$ **;** $m_{AA'} = -3$ **;** $m_a : y - 2 = -3(x - 1)$ **;** $3x + y - 5 = 0$

6. $ctg 2x = \dfrac{1}{tg 2x}$ **;** $tg 2x = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2 x}$ **;** $\dfrac{ctgx - tgx}{2} = \dfrac{1 - tg^2 x}{2tgx}$

Soluție

1. a) Scădem prima linie din celelalte și obținem $\det(A) = -8$.

b) Scădem pe rând prima ecuație din celelalte și obținem $y = z = t = \dfrac{1}{2}$ și apoi $x = -\dfrac{1}{2}$.

c) Se obține $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. a) Se obține $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} = \dfrac{S_3}{S_4} = 2$.

b) Calcul direct.

c) Observăm că $x = 0$ nu este rădăcină pentru *f*.

Ecuația $f(x) = 0$ este echivalentă cu ecuația $t^2 + 2t + a + 2 = 0$, unde $t = x - \dfrac{1}{x}$.

Dacă t parcurge $\mathbb{R}$, ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale.

Ecuația $t^2 + 2t + a + 2 = 0$ are rădăcinile reale dacă și numai dacă $a \le -1$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) f este continua pe D ,deci in aceste puncte nu avem asimptote verticale
$f_d(-2)=-\infty, f_s(2)=\infty \Rightarrow x=-2, x=2$ sunt asimptote verticale.

b) $f''(x)=\dfrac{8x}{\left(4-x^2\right)^2}$,deci $x=0$ punct de inflexiune.

c) Limita ceruta este $L=\lim\limits_{x\to\infty} x^a \cdot \ln\left(\dfrac{2+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{y\searrow 0}\dfrac{1}{y^a}\cdot\ln\dfrac{2+y}{2-y}$

$$L=\lim_{y\searrow 0}\frac{1}{y^a}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{2y}{2-y}\right)}{\frac{2y}{2-y}}\cdot\frac{2y}{2-y}=\lim_{y\searrow 0}\frac{1}{y^{a-1}}=\begin{cases}0, a<1\\ 1, a=1\\ \infty, a>1\end{cases}.$$

2.a) $I=\int_0^1\left(-x+2-\dfrac{x}{x^2+4}\right)dx$; $I=\left(-\dfrac{x^2}{2}+2x-\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+4\right)\right)\Big|_0^1$ si finalizare.

b) Avem ca $I=\int_1^4\dfrac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\dfrac{-1}{2}\cdot\int_1^4\left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)'\cdot xdx$

$$I=\frac{1}{2}\cdot\frac{-x}{x^2+4}\Big|_1^4+\frac{1}{4}\cdot arctg\frac{x}{2}\Big|_1^4=\frac{1}{4}\left(arctg\,2-arctg\frac{1}{2}\right).$$

c) Cu substitutia $f^{-1}(x)=t\Rightarrow f(t)=x, dx=f'(t)dt$

$I=\int_{\frac{4}{5}}^{2} f^{-1}(x)dx=-\int_0^1 t\cdot f'(t)dt=-t\cdot f(t)\Big|_0^1+\int_0^1 f(t)dt$,foloseste a) si se gaseste I .

Varianta 20 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $2<\sqrt{5},\ \log_3 4<2$

2. $x\in\{1\pm i\}$

3. $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$ **;** $\sin x\cos x=0, x\in[0,2\pi) \Rightarrow x\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$ **;** $x\in\left\{\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$

4. 21

5. $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NC}}$ **;** $\frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{CA}}=\frac{1}{5}; m=\frac{1}{5}$

6. $OA=\sqrt{5}$ **;** $OB=\sqrt{13}$ **;** $OB=\sqrt{13}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta=-120$. Se obține soluția unică $x=\frac{4}{5},\ y=\frac{3}{5},\ z=0$.

b) Determinantul sistemului este $\Delta=\begin{vmatrix} b & a & 0\\ c & 0 & a\\ 0 & c & b\end{vmatrix}=-2abc\neq 0$, deci sistemul are soluție unică.

c) Folosind formulele lui Cramer, obținem $x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A$.

$\hat{A}$ fiind unghi al triunghiului ABC, avem $A\in(0,\pi)$, deci $x_0=\cos A\in(-1,1)$.

Analog obținem $y_0=\cos B\in(-1,1)$ și $z_0=\cos C\in(-1,1)$.

2. a) Deoarece a și b iau independent câte trei valori, există $3\cdot 3=9$ matrice în mulțimea G.

b) Calcul direct.

c) $\det(A)=(a-b)(a+b)$. $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ fiind corp, din $(a-b)(a+b)=\hat{0}$ rezultă $a=b$ sau $a=-b$.

În total, există 6 matrice în G care au determinantul nul.

Varianta 20 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) f este derivabila pe $[0,\infty)$, $f'(x)=2e^x+6x-2$

$f'(x)\geq 0, x\geq 0$,cu egalitate daca $x=0$,de unde se obtine concluzia.

b) $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ nu este surjectiva.

c) $\frac{5}{6}$

2.a) $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=arctgt\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

b) Cu substitutia $\frac{1}{t}=y\Rightarrow J=\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt=\int_x^1 f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{-1}{y^2}\right)dy=\int_1^x\frac{1}{t^2}\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)dt$

$\Rightarrow J=\int_1^x\frac{t^3}{(t^2+1)(t^3+1)}dt=\int_1^x t^3\cdot f(t)dt$.

c) $A=\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt=\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_1^x t^3\cdot f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(t^3+1\right)\cdot f(t)dt$

$A=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt=arctgx-arctg1$,deci limita ceruta este $\frac{\pi}{4}$.

Varianta 21 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $x_{1,2} = 4 \pm 3i$

2. $\Delta > 0$, $\Delta = 5a^2 - 8a + 13$; $a \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{13}{5}, \infty\right)$

3. $\left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1$; $x \in \{5, 17\}$

4. 0

5. $d' : y - 2 = 1(x-1)$; $d' : x - y + 1 = 0$

6. $\frac{7}{9}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Calcul direct.

b) Tripletul $(0, 1, 0)$ e soluție a sistemului, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, deci acesta este compatibil.

Dacă $a + b + c \neq 0$ și $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + bc + ca$, atunci soluția precedentă este unică.

c) Din ipoteză rezultă că $a = b = c$. Dacă $a = b = c = 0$ orice triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ este soluție.

Dacă $a = b = c \neq 0$, atunci sistemul este echivalent cu ecuația $x + y + z = 1$.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x - y \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{cases}.$$

A doua ecuație din sistem are o infinitate de soluții, care sunt coordonatele punctelor de pe cercul de centru $Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ și rază $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Soluțiile sistemului sunt $\begin{cases} x_t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos t \\ y_t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin t \\ z_t = 1 - x_t - y_t \end{cases}$, cu $t \in [0, 2\pi)$.

2. a) Deoarece a, b, c pot lua arbitrar câte 4 valori, există $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ matrice în mulțimea G.

b) De exemplu, matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ are proprietățile cerute.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$. $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \hat{1} \\ b(a+c) = \hat{0} \\ c^2 = \hat{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{\hat{1}, \hat{3}\} \\ c \in \{\hat{0}, \hat{2}\} \end{cases}$, deci $a + c \in \{\hat{1}, \hat{3}\}$.

Rezultă $b = \hat{0}$. Obținem patru matrice.

Varianta 21 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Limita ceruta este egala cu 1.

b) f' e functie polinomiala de grad 3 deci ecuatia va avea cel mult 3 radacini reale

Aplicand T. lui Rolle functiei f pe $[1,3],[3,5],[5,7] \Rightarrow f'$ se anuleaza in cel putin3 puncte.

c) $f(x)=\left(x^2-8x+7\right)\left(x^2-8x+15\right)=(a-4)(a+4)$

$f(x)=a^2-16\geq -16,$ cu egalitate daca $a=x^2-8x+11=0, x\in\left\{4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}\right\}$ Minimul cerut este -16.

2.a) Pentru $x\in\mathbb{R}^*, f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Din ipoteza avem ca $x^2\cdot f(x)=x\cdot\sin x, x\in\mathbb{R}$

$I=\int_0^{\pi} x\sin x dx=-\int_0^{\pi}(\cos x)'\cdot x dx \quad I=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx=\pi$.

b) Functia $g(x)=f(x), x\in I-\{0\}, g(0)=1, I=[0,1],$ este continua pe I deci integrabila

Cum f difera de g doar in x=0, rezulta ca si f este integrabila pe I.

c) Arata ca $\sin x<x, x>0$ .Atunci avem:

$\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx<\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\cos 1$.

Varianta 22 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. i

2. $g(x)=y; f(y)=0, y^2-3y+2=0$ **;** $y\in\{1,2\}$ **;** $x\in\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$

3. $\lg x(8x+9)=\lg 10(x^2-1)$ **;** $2x^2-9x-10=0$ **;** $x=\frac{9+\sqrt{161}}{4}$

4. $n(n-1)<20$ **;** $n\in\{2,3,4\}$

5. $A\left(\frac{1}{2},0\right)\in d_2; d(d_1,d_2)=d(A,d_1); d(A,d_1)=\frac{\sqrt{5}}{10}; d(d_1,d_2)=\frac{\sqrt{5}}{10}$

6. $\sin 75^0=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **;** $\sin 15^0=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **;** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Calcul direct.

b) Sistemul este compatibil determinat. Se obține soluția $x=\frac{c-b}{\det(A)}$, $y=\frac{a-c}{\det(A)}$, $z=\frac{a-c}{\det(A)}$.

c) Avem că rangul matricei sistemului este 2 și rangul matricei extinse este 3, de unde rezultă concluzia.

2. a) Se demonstrează că $f(1)=1$ și $f(2)=2$ și apoi că $f(5)=5$.

b) Folosind ipoteza, se deduce că $f(a_{n+1})=(f(a_n))^2+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și apoi, folosind această relație, se demonstrează prin inducție concluzia.

c) Se consideră $g\in\mathbb{R}[X]$, $g=f-X$. Din b) avem că $g(a_n)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, deci g este polinomul nul, așadar $f=X$.

Varianta 22 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x)=\dfrac{3\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}{\left(x^4+3\right)^2}, x\in\mathbb{R}$.

b) $x=1$ punct de maxim, $x=-1$ punct de minim $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Imaginea lui f este $\operatorname{Im} f=\left[\dfrac{-1}{4},\dfrac{1}{4}\right]$.

c) Daca $x=y$ avem egalitate

Daca $x<y$, se aplica T.Lagrange lui f pe $[x,y]$, se arata ca $f'(c)\le 1$ si rezulta cerinta

Daca $x>y$ atunci se procedeaza ca si anterior .

2.a) Avem: $\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(x^2+x-2\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)\right|_2^3=\dfrac{41}{6}$.

b)Se descompune in fractii simple functia de integrat si se obtine ca

.$\int_{-1}^{0}\dfrac{x^2+4}{x^3-3x+2}dx=\int_{-1}^{0}\left(\dfrac{\frac{1}{9}}{x-1}+\dfrac{\frac{5}{3}}{(x-1)^2}+\dfrac{\frac{8}{9}}{x+2}\right)dx$ .Finalizare.

c) $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f\left(x^2\right).e^{x^2}=0\Leftrightarrow 2xe^{x^2}\left(x^2+2\right)\left(x^2-1\right)^2=0\Leftrightarrow x\in\{0,1,-1\}$.

Arata ca doar $x=0$ este punct de extrem.

Varianta 23 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$ **;** $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2}$ **;** 1

2. $x^2-2x-4=0$ **;** $x\in\left\{1\pm\sqrt{5}\right\}$

3. $tg\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{2}\right)=ctg\left(arctg\frac{1}{2}\right)$ **;** $ctg\left(arctg\frac{1}{2}\right)=2$

4. $p=0,9$

5. $G\left(\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right)$

6. $-\frac{8}{15}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Calcul direct.

b) Fie $Y=\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}\in C(A)$, cu $Y^2=0_2$.

Obținem sistemul $\begin{cases} a^2+5b^2=0 \\ ab=0 \end{cases}$, cu unica soluție $a=b=0$, deci $Y=0_2$.

c) Fie $Z=\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}\in C(A)$, $Z\neq O_2$, cu $a,b\in\mathbb{Q}$.

Presupunem că $\det(Z)=0$, deci $a^2-5b^2=0$. Dacă $b=0$, atunci $a=0$, deci $Z=0_2$, fals.

Dacă $b\neq 0$, rezultă că $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$, fals.

2. a) $f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{1}\right)+f\left(\hat{2}\right)=\hat{3}a+\hat{1}=\hat{1}$.

b) $f=X^3+\hat{2}X^2+\hat{2}$ are singura rădăcină $x=\hat{2}$.

c) Deoarece $grad(f)=3$, f este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3$ $\Leftrightarrow$ f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$.

Aşadar $a\neq\hat{0}$ şi $\hat{1}+a\neq\hat{0}$, deci $a=\hat{1}$.

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f' > 0 \Rightarrow f$ strict crescatoare,deci f injective

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, f$ continua implica f surjectiva; f bijectiva , deci are loc cerinta problemei.

b) Din f continua si bijectiva rezulta ca f^{-1} este continua

$f(x_n) = 3 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) = x_n$,deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) = f^{-1}(3) = 1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) - f^{-1}(3)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) - f^{-1}(3)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \dfrac{n}{n+1}$

Limita ceruta este $L = \left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$

2.a) $f(x) = \int_0^a \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^a = \ln(a+1)$.

b) Cum $\sin t \le 1, \forall t \ge 0,$ cu egalitate pentru $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$,avem :

$f(x) < \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^x = \ln(x+1)$.

c) Avem:

$f(2\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+t} dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+t} dt + \int_0^\pi \frac{\sin(\pi + y)}{1+\pi+y} dy = \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+t} dt - \int_0^\pi \frac{\sin(y)}{1+\pi+y} dy = \int_0^\pi \frac{\pi \sin t}{(1+t)(1+\pi+t)} dt$

,de unde $f(2\pi) < \frac{\pi}{\pi+1} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+t} dt = \frac{\pi}{\pi+1} f(\pi) < f(\pi)$ caci $f(\pi) > 0$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. -1

2. $f(x)=ax^2+bx+c;\ a-b+c=4$, $a+b+c=2, 4a+2b+c=7$; $f(x)=2x^2-x+1$

3. $\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=\frac{11}{6}$ **;** $\log_2 x=1$ **;** $x=2$

4. $(1+x)^5+(1-x)^5=2+2C_5^2x^2+2C_5^4x^4$ **;** concluzia $\Leftrightarrow x^4+2x^2\geq 3,\forall|x|\geq 1$ **;**
$|x|\geq 1\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow x^4\geq 1\Rightarrow x^4+2x^2\geq 3$

5. $m_{AC}=-\frac{12}{5}, m_h=\frac{5}{12}$ **;** $h: y+1=\frac{5}{12}(x-2)$ **;** $h: 5x-12y-22=0$

6. $(2\vec{i}+5\vec{j})\cdot(3\vec{i}-4\vec{j})=-14$ **;** $(5\vec{i}-3\vec{j})\cdot(2\vec{i}+4\vec{j})=-2$ **;**-12

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Calcul direct.

b) $\det(A-A^t)=\det(A-A^t)^t=\det(A^t-A)=-\det(A-A^t)$, deci $\det(A-A^t)=0$.

c) $A-A^t\neq 0_3$, și în consecință, $\operatorname{rang}(A-A^t)\geq 1$.

Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, atunci $A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & b-d & c-g \\ d-b & 0 & f-h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix}$.

Dacă am avea $\operatorname{rang}(A-A^t)=1$, atunci toți minorii de ordinul doi ai matricei ar fi nuli.

Obținem $b-d=h-f=c-g=0$, deci $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$, adică $A=A^t$, fals.

Așadar $\operatorname{rang}(A-A^t)\geq 2$ și cum $\det(A-A^t)=0$, rezultă $\operatorname{rang}(A-A^t)=2$.

2. a) Notând $x^2=t$ obținem ecuația $t^2-5t+4=0$, cu soluțiile $t_1=1$ și $t_2=4$.
Rădăcinile lui f sunt $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=2$.

b) $\exists a\in\mathbb{Q}$ astfel ca $h=a\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+1)(X-1)$. Obținem $h=4X^4-5X^2+1$.

c) Din $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=2$ deducem că există polinomul cu coeficienți întregi q, astfel încât $g(X)=f(X)\cdot q(X)+2$. Presupunem contrariul, deci că există $n\in\mathbb{Z}$, astfel încât $g(n)=0$.
Obținem $(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)\cdot q(n)=-2$.
Egalitatea anterioară având loc în mulțimea $\mathbb{Z}$, divizorii întregi ai lui -2 fiind $-2,-1,1,2$, obținem că două dintre numerele $n-2, n-1, n+1, n+2$ coincid, fals.

BACALAUREAT 2008-MATEMATICĂ - Proba D, tipul subiectului MT1, programa M1

Varianta 24 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Avem ca $f'(x)=1-\cos x \geq 0$ si f nu se anuleaza pe o multime care este interval,de unde se obtine concluzia.

b)Functia f este continua pe $\mathbb{R}$,deci nu are asimptote orizontale.Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,functia f nu are asimptote orizontale.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1, \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(-\sin x)$ si aceasta nu exista,functia nu are asimptota oblica la ∞ .Analog spre $-\infty$.

c) Functia este derivabila pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Cum $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x-\sin x}{x^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\in\mathbb{R}$,deducem ca g este derivabila si in x=0.

2.a) f continua implica faptul ca f are primitive.

b) Avem ca $I=\int_0^1\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)dx=\left(-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1$ si finalizare.

c) $f(t)\geq 0, \forall t\in[0;x], x>0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \geq 0$

Din ipoteza rezulta ca $e^{-x}\geq -x+1 \Rightarrow 1-e^{-x}\leq x \Rightarrow e^{-x}-e^{-2x}\leq xe^{-x}$,deci

$\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\leq e^{-x}, x>0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt = 1-e^{-x}<1$.

Varianta 25 - rezolvari mate MT1

Soluții

1. $-3+4i$

2. $(a+1)x^2+(a-1)x+2=0$; $\Delta>0$; $a\in\left(-\infty,5-4\sqrt{2}\right)\cup\left(5+4\sqrt{2},+\infty\right)$

3. $2^x=y; y^2-6y+8=0$; $y\in\{2,4\}$; $x\in\{1,2\}$

4. $p=0,4$

5. M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului, $HM\perp BA$ si analoagele; HM mediatoarea $[BA]$ si analoagele; H este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$

6. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^2=1$.

b) Avem $\sigma^3=e$, unde e este permutarea identică. Evident, σ comută cu permutările e,σ,σ^2.
Se arată, prin calcul direct, că σ nu comută cu celelalte 3 permutări din S_3.

c) Dacă $x\in S_3$ este o permutare impară (deci o transpoziție), evident, $x^2=e\neq\sigma$.
Obținem unica soluție $x=\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

2. a) Calcul direct.
b) Se arată că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G. Se verifică axiomele grupului abelian. Elementul neutru este matricea $X(0)$, iar simetrica lui $X(a)\in G$ este matricea $X\left(-1+\dfrac{1}{a+1}\right)\in G$.

c) Se demonstrează prin inducție că
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $X(a_1)\cdot X(a_2)\cdot...\cdot X(a_n)=X\left((a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot...\cdot(a_n+1)-1\right)$.
Pentru $n=2007$ și $a_k=k$, $\forall k\in\{1,2,...,2007\}$, obținem $t=2008!$

Varianta 25 - rezolvari mate MT1

<u>Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului</u>
<u>Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar</u>

Soluții

1.a) Avem ca $f'(x)=\frac{\ln x}{x}, f''(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\geq 0, x\in(0,e]$,de unde se obtine concluzia.

b)Dreapta x=0 este asimptota verticala.Nu exista alte asymptote.

c) Se aplica T. Lui Lagrange functiei f pe $[k;k+1]$ si rezulta inegalitatile

$\frac{\ln(k+1)}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{\ln k}{k}$. Adunand ineg.anterioare pentru k de la 3 la n

Obtinem $a_n+\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{\ln 3}{3}<f(n+1)-f(3)<a_n$

Atunci $a_n>f(n+1)-f(n)-f(3)>-f(3)$,deci sirul e marginit inferior

$a_{n+1}-a_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-(f(n+1)-f(n))=f'(n+1)-f'(c_n)<0$,deci sirul e convergent.

2.a) Aria ceruta este $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

b) $V=\pi\cdot\int_0^{\pi}f^2(x)dx=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$.

c) Limita ceruta se poate scrie astfel: $L=\lim\limits_{n\to\infty}2\sin^2\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)$

Foloseste ca $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1, a_n\to 0$;

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}cox\frac{k}{n}=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\cos x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\sin 1.$$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Din $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}, \forall k\in\mathbb{N}^*$ se obține $N=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}=1-\frac{1}{2008}$, deci $N\in[0;1)\Rightarrow[N]=0$.

2. $f(f(x))=4x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Fie S suma cerută. $S=\sum_{k=1}^{10}(4k-1)=4\cdot\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=210$.

3. Ecuația dată se scrie $3^{2x}+3^x-2=0$. Notând $3^x=y$ obținem ecuația $y^2+y-2=0$ cu soluțiile -2 și 1. Cum $3^x>0$, convine doar $3^x=1$, deci $x=0$.

4. f bijectivă $\Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow \operatorname{Im}(f)=A$. Atunci $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)=0$.

5. Mijlocul segmentului $[AB]$ este $M(0;1)$. Punctul $P(x,y)$ aparține mediatoarei segmentului $[AB]$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}=0$. Avem $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-4\vec{j}$ iar $\overrightarrow{MP}=x\vec{i}+(y-1)\vec{j}$.
Ecuația mediatoarei lui $[AB]$ va fi : $2x-4(y-1)=0 \Leftrightarrow x-2y+2=0$.

6. Avem $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha<0\Rightarrow\ \cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Calcul direct.
b) Se demonstrează prin inducție după $n\in\mathbb{N}^*$.
c) $A^2=-I_2$, deci $A^{2008}=I_2$.

2. a) Folosind relațiile lui Viète, se obține $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=a$.
b) Din teorema împărțirii cu rest, $\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ și $q\in\mathbb{R}[X]$, $f=(X-1)^2\cdot q+\alpha X+\beta$.
Din $\begin{cases} f(1)=\alpha+\beta \\ f'(1)=\alpha\end{cases}$, se obține $\begin{cases}\alpha=a+8\\ \beta=-7\end{cases}$. Restul împărțirii este: $r=(a+8)X-7$.
c) $\sum_{k=1}^{4}x_k^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}<0$, deci ecuația nu are toate rădăcinile reale
Funcția polinomială asociată (notată tot cu f) fiind continuă, $f(0)=-1$ și $\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, f are cel puțin o rădăcină reală. f are un număr par de rădăcini în $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, deci are exact două rădăcini reale.

Varianta 26 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a**) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare.

c) $x_2 = f(0) = -\frac{\pi}{2} \to x_1 > x_2$ şi f este strict crescătoare $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior de $-\frac{3\pi}{2}$, deci conform Teoremei lui Weierstrass este convergent.

2) **a**) g este continuă, deci are primitive, iar derivata unei primitive este pozitivă, deci orice primitivă este strict crescătoare.

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = f(x)x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$

c) $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \left(x \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon} \right) = \frac{\pi}{2} - 1 < \frac{\pi}{4}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^6=1+i-1-i+1+i-1=i$.

2. f este funcție de gradul 2 cu $\Delta=1$. Valoarea maximă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{8}$.

3. Notând $\lg x=y$ obținem ecuația $y^2+5y-6=0$ cu soluțiile -6 și 1.

$\lg x=-6 \Leftrightarrow x=\frac{1}{10^6}$, iar $\lg x=1 \Leftrightarrow x=10$.

4. O funcție $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ cu proprietatea $f(0)=f(1)=2$ este unic determinată de un tabel de tipul

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	2	a	b

unde $a,b\in\{0,1,2,3\}$.

Vor fi $4^2=16$ funcții cu proprietatea cerută.

5. Fie θ măsura în radiani a unghiului $\sphericalangle AOB \Rightarrow \cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\|\cdot\|\overrightarrow{OB}\|}$.

Cum $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+\vec{j}$, rezultă că $\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{5}$, $\|\overrightarrow{OB}\|=\sqrt{10}$ și $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5$.

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$.

6. Avem $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{9} \Rightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha=-\frac{8}{9}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție: **1. a)** $\operatorname{rang}(A+I_2)=2$.

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Presupunem că ecuația are soluția $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Atunci, $A\cdot Y=Y\cdot A$ și din **b)** deducem că există $x, y\in\mathbb{C}$, astfel încât $Y=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x\end{pmatrix}$. Cum $\det(Y)=0$, obținem $x=0$ și apoi $Y^2=0_2$, fals.

2. a) Calcul direct.

b) Calcul direct.

c) Se demonstrează prin inducție că

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R},\ x_1*x_2*\ldots*x_n=(x_1+1)(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_n+1)-1.$$

Obținem $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2008}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2008}-1=2008$.

Varianta 27 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

b) $x\in(-1,1)\to f'(x)=\arcsin x+\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+\dfrac{x-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$

$\lim\limits_{x\nearrow 1}f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{\pi}{2}.$ f nu este derivabilă în -1.

c) $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}-(x-1)\cdot\dfrac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1-x}{\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}\geq 0\Rightarrow f$ este convexă.

2) **a)** $\left.\begin{array}{l}\mathrm{F}'(x)=f(x)=\dfrac{x^5-1}{x-1},\ \forall x\neq 1\\ \mathrm{F}'(1)=f(1)=5\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{F}'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \mathrm{F}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\mathrm{F}(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x$ deci $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{F}(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)=+\infty$. F fiind continuă, rezultă că F este surjectivă, deci conform lui (**a**) este bijectivă.

c) $\int_0^a F'(x)dx=\int_0^1 t\cdot f(t)dt=\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^5}{5}+\dfrac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Fie z numărul din enunț. Cum $\bar{z} = z$, rezultă că $z \in \mathbb{R}$, deci $\operatorname{Im} z = 0$.

2. Funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

$\sqrt{2} < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right) > f\left(\sqrt{3}\right) > f(2)$

3. Se impune condiția $x \geq \frac{1}{2}$. Prin ridicare la pătrat, ecuația devine $2x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 5$.

4. O funcție $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ cu proprietatea $f(0) = 0$ este unic determinată de un tabel de tipul

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	a	b	c

unde $a, b, c \in \{0,1,2,3\}$.

Vor fi $4^3 = 64$ funcții cu proprietatea cerută.

5. $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

6. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos\alpha < 0$

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $\det\left(A - xI_2\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 4\}$.

b) Calcul direct.

c) Fie $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, o soluție a ecuației. Atunci, $A \cdot Y = Y \cdot A$.

Din **b)** rezultă că există $x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Obținem $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$, deci există 4 soluții în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Se arată că $f_{-1,2} \circ f_{-1,2} = f_{1,0}$.

b) Se arată că operația de compunere este lege de compoziție pe G. Se verifică axiomele grupului. Se demonstrează că elementul neutru este funcția identică, $f_{1,0}$, iar pentru funcția $f_{a,b} \in G$, simetrica sa este $f_{a',b'} \in G$, unde $a' = \frac{1}{a}$ și $b' = -\frac{b}{a}$.

c) $f_{1,1}(x) = x + 1$, $\left(f_{1,1} \circ f_{1,1}\right)(x) = x + 2$ și inductiv se obține $\underbrace{\left(f_{1,1} \circ f_{1,1} \circ \ldots \circ f_{1,1}\right)}_{\text{de } n \text{ ori } f_{1,1}}(x) = x + n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

așadar $\underbrace{\left(f_{1,1} \circ f_{1,1} \circ \ldots \circ f_{1,1}\right)}_{\text{de 2008 ori } f_{1,1}}(x) = x + 2008$.

Varianta 28 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a**) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=0.$

b) Studiem continuitate într-un $n\in\mathbb{Z}$. $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x)=0$ şi $f(x)=0$. Deci f este continuă pe intervalul $[0,3]$.

c) Explicitând funcția observăm că 1 şi 2 sunt puncte unghiulare şi f este derivabilă pe $[0,3]\setminus\{1,2\}$.

2) **a**) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\sin x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2-\sin x)'}{2-\sin x}dx=-\ln(2-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2.$

b) $\mathrm{F}'(x)=f(x)$ şi $f(x)>0$ deoarece $2-\sin x\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Deci $\mathbb{F}$ este strict crescătoare.

c) $\frac{1}{2-\sin t}\geq\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^x f(t)dt\geq\frac{t}{3}\Big|_0^x=\frac{x}{3}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty.$

Varianta 29 - rezolvari mate MT1

Soluție

1. Fie a numărul din enunț. Avem $a=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-1=1$, deci $a\in\mathbb{N}$.

2. Tabelul de semn al funcției f este:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+ + + +$	0	$- - -$	0	$+ + + +$	

$f(x)\le 0 \iff x\in\left[\frac{1}{2};\,2\right]$.

3. Se impun condițiile $x\le 2$ și $x\ge 0$. Prin ridicare la pătrat ecuația devine $x^2+x-2=0$ cu soluțiile 1 și -2. Cum $x\in[0;\,2]$, rezultă că $x=1$ este unica soluție a ecuației date.

4. Mulțimea A are 2^6-1 submulțimi nevide dintre care 2^3-1 au toate elementele impare.

Probabilitatea cerută este $\frac{2^3-1}{2^6-1}=\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$.

5. $P_{\triangle ABC}=AB+BC+AC=\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{5}$.

6. Avem $x+\frac{1}{x}\ge 2,\ \forall x>0$, cu egalitate numai pentru $x=1$.

Cum $\alpha\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha>0$ și atunci $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \sin 2\alpha=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $\det(A)=0 \iff m\in\{1,2\}$.

b) Dacă $m\notin\{1,2\}$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil

Se arată că dacă $m\in\{1,2\}$, atunci sistemul este compatibil 1-nedeterminat.

c) Pentru $m\ne 1$, sistemul are soluția $\begin{cases}x=1\\ y=0\\ z=-1\end{cases}$.

Dacă $m=1$, $rang(A)=rang(\overline{A})=2$, și sistemul are soluții de forma $\begin{cases}x=a\\ y=1-a\\ z=-1\end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

2. a) Dacă $x=y=\hat{0}$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$.

$\forall x\in\mathbb{Z}_3$, $x^2\in\{\hat{0},\hat{1}\}$ și dacă $x\ne\hat{0}$ sau $y\ne\hat{0}$, se arată că $x^2+y^2\in\{\hat{1},\hat{2}\}$.

b) Dacă $X=A(a,b)\in H$ și $Y=A(c,d)\in H$, $X\cdot Y=A\left(ac+\hat{2}bd,\,bc+ad\right)\in H$

Dacă $X=A(a,b)\in H$, atunci $d=a^2+b^2\in\{\hat{1},\hat{2}\}$ și $X^{-1}=A\left(ad^{-1},\,\hat{2}bd^{-1}\right)\in H$

c) $X^2=I_2 \iff \begin{cases}a^2+\hat{2}b^2=\hat{1}\\ ab=\hat{0}\end{cases}$.

Pentru $a=\hat{0}$ ecuația $\hat{2}b^2=\hat{1}$ nu are soluții.

Pentru $b=\hat{0}$ rezultă $\hat{a}\in\{\hat{1},\hat{2}\}$ și soluțiile $X_1=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}$ și $X_2=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{2}\end{pmatrix}$.

Varianta 29 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a)** $f_n(x)=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1},\ \forall x\neq -1 \Rightarrow f_n{}'(x)=\dfrac{g_n{}'(x)}{x+1}-\dfrac{g_n(x)}{(x+1)^2}.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n+1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}}{\dfrac{3}{2}}-\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}+1}{\dfrac{9}{4}}\right]=-\dfrac{4}{9}.$

c)

2) **a)** $\mathrm{I}_2=\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx=\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx=\left(\dfrac{4x^3}{3}-\dfrac{4x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\dfrac{32}{3}-16+\dfrac{32}{5}.$

b) $\mathrm{I}_n=\int_0^2\left(2x-x^2\right)^n\cdot(x)'\,dx=\left(2x-x^2\right)^n\cdot x\Bigg|_0^2-n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}\cdot(2-2x)\cdot x=$

$=-2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}\cdot\left(-x^2+x\right)dx=-2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}\left(-x^2+2x-x\right)dx=$

$=-2n\int_0^2\left(2x-1^2\right)^n dx+2n\int_0^2 x\cdot\left(2x-x^2\right)^{n-1}\Rightarrow(2n+1)\mathrm{I}_n=2n\,\mathrm{I}_{n-1}.$

c) Conform punctului (**b**) $\mathrm{I}_n=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{I}_n=0.$

Varianta 30 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1}$

Fie a numărul din enunț. Avem $a = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1} = -\sqrt{1}+\sqrt{100} = 9$, deci $a \in \mathbb{N}$.

2. Graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte dacă și numai dacă ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; +\infty\right)$.

3. Se impune condiția $x \in (-1; +\infty)$. Ecuația dată este echivalentă cu $\log_3\left[(x+1)(x+3)\right] = \log_3 3 \Leftrightarrow$ $x^2 + 4x = 0$ cu soluțiile 0 și -4. Cum $x \in (-1; \infty)$, rezultă că $x = 0$ este unica soluție a ecuației date.

4. Mulțimea A are 2^5 submulțimi. Numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A este C_5^3.

Probabilitatea cerută este $\frac{C_5^3}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

5. Fie $G(x_G, y_G)$ centrul de greutate al triunghiului ABC.

Avem $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4}{3}$ și $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{5}{3}$.

6. Folosim relația $|\sin x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

Cum $\frac{\pi}{8} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} > 0$. Atunci $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

1. a) Calcul direct.

b) $B = A + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = A$.

c) Fie $A_1(a, f(a))$, $A_2(b, f(b))$ și $A_3(c, f(c))$ cele trei puncte, cu $a \le b \le c$.

$S[A_1A_2A_3] = \frac{1}{2}|B| \overset{a)}{=} \frac{(b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)}{2}$.

Cel puțin două dintre cele trei numere a, b, c au aceeași paritate, deci cel puțin unul dintre numerele $b-a, c-b, c-a$ este par. Rezultăcă $S[A_1A_2A_3] \in \mathbb{N}$. Se arată că $f(a)$, $f(b)$ și $f(c)$ sunt multipli de 3, deci B este divizibil cu 3, adică $S[A_1A_2A_3]$ este divizibilă cu 3.

2. a) Calcul direct.

b) Se arată că $\forall\, X(a), X(b) \in H$, cu $a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{10}\right\}$, $a + b - 10ab \ne \frac{1}{10}$, deci $X(a)X(b) \in H$.

c) Pentru $X = X(a) \in G$, $X^2 = I_2 \Leftrightarrow X\left(2a - 10a^2\right) = X(0)$.

Se obțin soluțiile $X_1 = I_2$ și $X_2 = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Varianta 30 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=+\infty.$

b) $f'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x;\quad f''(x)=-x+\sin x.$

c) $f'''(x)=-1+\cos x\le 0\Rightarrow f''$ este strict descrescătoare

$\Rightarrow f''(x)\le f''(0),\ \forall x\ge 0\to f''(x)\le 0\to$

$\to f'$ este strict descrescătoare $\to f'(x)\le f'(0),\ \forall x\ge 0$

$f'(x)\le 0\to f$ este strict descrescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$ şi $f(0)=0\to f(x)\le 0,\ \forall x\ge 0.$

2) **a)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\left(\sin x-x+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{48}.$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x-x+\frac{x^2}{6}}{x^2}=+\infty.$

c) $f'(x)=-\sin x+x;\ f''(x)=1-\cos x\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)\to$

$\to\cos x^2-1+\frac{x^4}{2}\ge 0\to\cos x^2\ge 1-\frac{x^4}{2}\to\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx\ge\frac{9}{10}.$

Varianta 31 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\log_{16} 24 = \dfrac{\log_2\left(2^3 \cdot 3\right)}{\log_2\left(2^4\right)} = \dfrac{3+\log_2 3}{4} = \dfrac{3+\dfrac{1}{\log_3 2}}{4} = \dfrac{3+\dfrac{1}{a}}{4} = \dfrac{1+3a}{4a}$.

2. Fie a și b numerele căutate. Avem $\begin{cases} a+b=1 \\ a\cdot b=-1 \end{cases}$.

Numerele a și b vor fi soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2-x-1=0$, adică $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3. Ecuația se scrie $2\cdot 2^{2x}+4\cdot 2^x=160 \Leftrightarrow 2^{2x}+2\cdot 2^x=80 \Leftrightarrow \left(2^x+1\right)^2=81$ și cum $2^x+1>0$ obținem $2^x+1=9$, de unde $x=3$.

4. Putem alege 3 fete din cele 12 în C_{12}^3 moduri. La fiecare alegere a fetelor putem alege 2 băieți din cei 10 în C_{10}^2 moduri. Comitetul clasei poate fi ales în $C_{12}^3\cdot C_{10}^2=9900$ moduri.

5. Avem $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$. Ecuația paralelei prin C la AB este $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-3}{2}$, adică $2x+3y-11=0$.

6. Deoarece $6\in\left(\dfrac{3\pi}{2};\,2\pi\right)$, rezultă că numărul real 6 se reprezintă pe cercul trigonometric în cadranul IV. În concluzie $\sin 6<0$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Calcul direct.

b) Se obține $\left(8x^3+2x\right)A(x)=O_2$ și apoi $x\in\left\{-\dfrac{i}{2},\dfrac{i}{2},0\right\}$.

c) Presupunem că ecuația are soluția $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Atunci $X^4=\left(A(0)\right)^2=O_2$.

Rezultă $\det(X)=0$ și $X^2=t\cdot X$, unde $t=a+d$.

Se demonstrează că $X^4=t^3\cdot X$, deci $X=O_2$ sau $t=0$. În ambele cazuri rezultă $X^2=O_2$, fals.

2. a) $a_{2008}=2$ și $a_{2007}=0$.

b) Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $q\in\mathbb{C}[X]$ și $a,b\in\mathbb{C}$, astfel încât $f=\left(X^2-1\right)\cdot q+aX+b$. Obținem $a=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$ $b=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$.

Cum $f(1)=f(-1)=2^{1005}$, restul împărțirii polinomului f la X^2-1 este $r=2^{1005}$.

c) Fie $z\in\mathbb{C}$ rădăcină a lui f. Atunci $(z+i)^{2008}=-(z-i)^{2008}$, de unde rezultă $|z+i|=|z-i|$ și înlocuindu-l pe $z=a+b\cdot i$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ în relația precedentă, deducem $b=0$, deci $z\in\mathbb{R}$.

Varianta 31 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a**) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1=m$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\left|x^2-x\right|}+x\right)\dfrac{1}{2}=n\Rightarrow y=-x+\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$..

b) f este derivabilă pe intervalul $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ şi 0 şi 1 sunt puncte de întoarcere ale graficului.

c) $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$; $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ şi $f'(x)=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$; $x\in(0,1)$.

Pentru $x\in(-\infty,0)$, f este strict descrescătoare, iar pentru $x\in(1,+\infty)$, f este strict crescătoare.

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, deci 0 şi 1 sunt puncte de minim (şi de întoarcere), iar $\dfrac{1}{2}$ este punct de maxim.

2) **a**) $\mathrm{I}_2=\int_0^1\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=x\Big|_0^1-\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=1-\dfrac{\pi}{4}$.

b) $\mathrm{I}_{n+2}+\mathrm{I}_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{n+1}$.

c) Din (**b**) $\Rightarrow\dfrac{1}{2(n+1)}\le\mathrm{I}_n\le\dfrac{1}{2(n-1)}$ folosind monotomia lui $\left(\mathrm{I}_n\right)_{n\ge1}$. Conform criteriului cleştelui avem $\lim\limits_{n\to\infty}n\mathrm{I}_n=\dfrac{1}{2}$.

Varianta 32 - rezolvari mate MT1

Soluție

1. Numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{2008}}$ sunt în progresie aritmetică cu rația $\frac{1}{2}$.

Rezultă că $s = \dfrac{\frac{1}{2^{2009}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^{2008}}$ și de aici $1 < s < 2$.

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 1 = -4x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Punctul de intersecție cerut este $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

3. Utilizând relația $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ecuația devine $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.
Notăm $\sin x = y$ și obținem ecuația $y^2 + y - 2 = 0$ cu soluțiile 1 și -2.
Ecuația $\sin x = -2$ nu are soluții (pentru că $-1 \le \sin x \le 1$), iar $\sin x = 1 \Leftrightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Numărul funcțiilor bijective $f : A \to A$ este $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

5. Patrulaterul convex $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă diagonalele sale au același mijloc.
Mijlocul lui $[AC]$ este $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$. Fie $D(x, y)$. Mijlocul lui $[BD]$ este $M'\left(\frac{-1+x}{2}; \frac{1+y}{2}\right)$.

$M = M' \Leftrightarrow \frac{-1+x}{2} = \frac{3}{2}$ și $\frac{1+y}{2} = 1 \Rightarrow D(4;1)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

6. Deoarece $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos x < 0$ și atunci $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{4}{5}$.

Deoarece $\frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{x}{2} > 0$, deci $\sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Soluție

1. a) Calcul direct.
b) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ sistemul este de tip Cramer, cu unica soluție $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, care nu verifică ecuația (C).
c) Pentru $a = -2$, din sistem rezultă $x = y = z - 1$.

Folosind ecuația (C), găsim soluțiile $\begin{cases} x = y = 1 + \sqrt{2} \\ z = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$ și $\begin{cases} x = y = 1 - \sqrt{2} \\ z = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$.

Pentru $a = 1$, sistemul devine $x + y + z = 1$, cu soluțiile $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 1 - \alpha - \beta \end{cases}$ și cum $\alpha^2 + \beta^2 = (1 - \alpha - \beta)^2$ pentru mai mult de două numere reale, $a = 1$ nu e soluție.

2. a) Pentru $a = 19 \in \mathbb{Q}$, $b = 6 \in \mathbb{Q}$, avem $a^2 - 10b^2 = 1$, deci $A = \begin{pmatrix} 19 & 10 \cdot 6 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.

b) Pentru $X = \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ și $Y = \begin{pmatrix} a' & 10b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$, avem $XY = \begin{pmatrix} a'' & 10b'' \\ b'' & a'' \end{pmatrix}$, unde
$a'' = a \cdot a' + 10b \cdot b' \in \mathbb{Q}$ și $b'' = b \cdot a' + a \cdot b' \in \mathbb{Q}$ și $\det(XY) = \det(X)\det(Y) = 1$.

c) Se arată inductiv că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 10 \cdot b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \in G$.

Cum $b_n > 0$, rezultă că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \ne I_2$ și apoi că puterile matricei A sunt o infinitate de elemente distincte ale grupului $(G, \cdot)$.

Varianta 32 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a)** $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}$.

b) $x+2>x\Rightarrow \operatorname{arctg}(x+2)>\operatorname{arctg}x\Rightarrow f(x)>0.$

f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,-1)$ şi strict descrescător pe intervalul $(1,+\infty)$, deci -1 este maxim global. $f(-1)=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}.$

c) Se arată că $g'(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g$ este constantă.

2) **a)** $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2-1+\frac{1}{1+x^2}}{x}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2.$

b) $f(x)\geq\dfrac{x^3}{3}-x-\dfrac{\pi}{2}\rightarrow\displaystyle\int_0^x f(t)dt\geq\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot x$. Deci $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}=+\infty.$

c) $g(x)\geq f(x),\ \forall x\in[0,1)\Rightarrow \mathrm{A}=\displaystyle\int_0^1\left(g(x)-f(x)\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\log_4 2+\log_3 9+\sqrt[3]{27}=\frac{1}{2}+2+3=\frac{11}{2}$.

2. Funcția f este funcție de gradul al doilea cu $\Delta=-8$ și $a=3>0$.

Valoarea minimă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4a}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

3. Notând $4^x=y$ obținem ecuația $y^2+3y-4=0$ cu soluțiile -4 și 1.

Cum $4^x>0$, convine doar $4^x=1$, deci $x=0$.

4. Dacă $n\in\mathbb{N}$, atunci $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow$ n este pătrat perfect.

În mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ sunt 100 de elemente dintre care 10 sunt pătrate perfecte: $0^2, 1^2, 2^2, ..., 9^2$.

Probabilitatea cerută este $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0{,}1$.

5. Avem $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{CD}=(a-1)\vec{i}+\vec{j}$. Atunci $AB\,//\,CD \Leftrightarrow \frac{a-1}{-3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$.

6. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=8+5\sqrt{3}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Se arată că $B^3=I_3$

b) $B^{-1}=B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

c) Obținem $(a+b+c)\cdot\det(A)=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)^2\cdot\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\geq 0$.

2. a) Calcul direct.

b) $\hat{0}=\hat{0}^2+\hat{0}^2$, $\hat{1}=\hat{0}^2+\hat{1}^2$, $\hat{2}=\hat{1}^2+\hat{1}^2$, $\hat{3}=\hat{1}^2+\hat{3}^2$, $\hat{4}=\hat{0}^2+\hat{2}^2$, $\hat{5}=\hat{1}^2+\hat{2}^2$, $\hat{6}=\hat{2}^2+\hat{3}^2$.

c) Se arată inductiv că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left\{x^{2n}\,\middle|\,x\in\mathbb{Z}_7\right\}=H$, de unde rezultă concluzia.

Varianta 33 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a**) $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}>0\Rightarrow f'$ este strict ctescătoare.

b) Se poate demonstra prin calcul sau aplicând Teorema lui Lagrange.

c) Se adună relațiile de la (**b**) de la $k=1$ până la $k=n$ şi astfel se obține marginea şirului $(a_n)_{n\geq 1}$. Şirul este evident crescător, deci va fi convergent conform Teoremei lui Weierstrass.

2) **a**) $f_1(x)=\int_0^1 t\cdot\operatorname{arctg} t=\dfrac{t^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} t\Big|_0^x-\dfrac{1}{2}\int_0^x\dfrac{t^2+1-1}{t^2+1}dx=\dfrac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} x.$

b) $f_n(1)=\int_0^1 t^n\cdot\operatorname{arctg} t\,dt\leq\dfrac{\pi}{4}\cdot\int_0^1 t^n dt=\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{n+1}.$

c) $f_n(1)=\int_0^1\left(\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right)'\cdot\operatorname{arctg} t\,dt=\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\dfrac{t^{n+1}}{t^2+1}dt.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\cdot\int_0^1\dfrac{t^{n+1}}{t^2+1}dt=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot f_n(1)=\dfrac{\pi}{4}.$

Varianta 34 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Avem $|3+4i|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ și atunci $|z|=\left|(3+4i)^4\right|=|3+4i|^4=5^4=625$.

2. Fie $V\left(x_V, y_V\right)$ vârful parabolei $\Rightarrow x_V=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2},\ \ y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{1}{2}$. Evident $x_V+y_V=0$.

3. Ecuația devine $\sin x(1-2\cos x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0$ sau $1-2\cos x=0$.

Cum $x\in[0, 2\pi)$, avem $\sin x=0 \Leftrightarrow x=0$ și $x=\pi$, iar $\cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$ și $x=\dfrac{5\pi}{3}$.

4. Numărul funcțiilor bijective $f: A\to A$ este $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

5. Avem $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{CD}=(a-1)\vec{i}+\vec{j}$.

Atunci $AB\perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow -3(a-1)+2=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{5}{3}$

6. Avem $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Atunci $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C \Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(B-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(C-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Cum $B,C\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ obținem $B=C$, adică triunghiul ABC este isoscel.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Se arată că suma elementelor matricei A este $S=80$.

b) Calcul direct.

c) Se arată inductiv că $A^n=32^{n-1}\cdot A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Rezultă că $rang\left(A^n\right)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. a) Calcul direct.

b) $e\in\mathbb{R}$ este element neutru al legii „$*$” $\Leftrightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $(ae-2)\cdot x=e-6$ $\Leftrightarrow$ $e=6$ și $a=\dfrac{1}{3}$.

c) Avem $6*6\in[0,6]$ $\Leftrightarrow$ $a\in\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right]$. Verificăm că pentru $a\in\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right]$, „$*$” e o lege de compoziție pe $[0,6]$. Pentru $y\in[0,6]$ fixat, considerăm funcția $f:[0,6]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a\cdot y-1)\cdot x-y+6$.

Avem $\dfrac{1}{a}\in[3,6]$. Dacă $0\le y<\dfrac{1}{a}$, funcția f este strict descrescătoare pe $[0,6]$, deci $0\le(6a-1)\cdot y\le f(x)\le 6-y\le 6$. Dacă $y=\dfrac{1}{a}$, $0\le f(x)=6-y\le 6$.

Dacă $\dfrac{1}{a}<y\le 6$, funcția f este strict crescătoare pe $[0,6]$, deci $0\le 6-y\le f(x)\le(6a-1)\cdot y\le 6$.

Așadar, pentru orice $a\in\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right]$, „$*$” este o lege de compoziție pe intervalul $[0,6]$.

Varianta 34 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a**) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}} > 0,\ \forall x > 0.$

b) Ce arată că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < 0$ şi cum f este strict crescătoare, rezultă că $f(x) < 0,\ \forall x > 0.$

c) $a_{n+1} - a_n = f(n)$ şi conform (**b**) $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2) **a**) $f_3'(x) = x^3 \arcsin x.$

b) $f_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} t \cdot \arcsin t = \dfrac{t^2}{2} \cdot \arcsin t \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \dfrac{\pi}{28} + \int_0^1 \dfrac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$

$= \dfrac{\pi}{48} + \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{48} + \dfrac{\sqrt{3}}{16} - \dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{3}}{16} - \dfrac{\pi}{48}.$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \int_0^x t^2 \cdot \arcsin t\,dt = \int_0^{1-\varepsilon} t^2 \cdot \arcsin t\,dt.$

Varianta 35 - rezolvari mate MT1

Soluție

1. $(2+i)^3+(2-i)^3=2^3+3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2+i^3+2^3-3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2-i^3=4$.

2. $f(f(x))=f^2(x) \Leftrightarrow x+4=(x+2)^2 \Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=-3$.

3. Ecuația se scrie $2\cdot 3^{2x}+2^x\cdot 3^x-3\cdot 2^{2x}=0$ și împărțind prin 2^{2x} se obține $2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-3=0$.

Notăm $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow 2y^2+y-3=0 \Rightarrow y_1=1$ și $y_2=-\frac{3}{2}$.

Cum $\left(\frac{3}{2}\right)^x>0$, convine doar $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

4. Mulțimea A are 1001 elemente, iar numărul celor divizibile cu 5 este dat de numărul k-urilor cu proprietatea $k\in\mathbb{N},\ 0\le 5k\le 1000$ adică $0\le k\le 200$. Probabilitatea cerută este $\frac{200}{1001}$.

5. Triunghiul AOB este dreptunghic în O. Avem $AO=3,\ BO=4,\ AB=5$.

Fie x distanța de la O la dreapta AB. Atunci $AO\cdot OB=x\cdot AB \Rightarrow x=\frac{AO\cdot OB}{AB} \Rightarrow x=\frac{12}{5}$.

6. $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAD)=45^\circ$.

Aria paralelogramului este $AB\cdot AD\cdot \sin\widehat{BAD}=24\sqrt{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Dacă $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, ecuația e echivalentă cu sistemul $\begin{cases}x-2y-z=2\\2x+2y=1\\x+4y-3z=5\end{cases}$. Sistemul este compatibil nedeterminat, deoarece rangul matricei sistemului este egal cu 2, ca și rangul matricei extinse.

b) Calcul direct.

c) Se arată că $A^*=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 2\\ 6 & -2 & -2\\ 6 & -2 & -2\end{pmatrix}$. Rezultă $rang\left(A^*\right)=1$.

2. a) $7^2-2\cdot 5^2=-1$, deci $7+5\sqrt{2}\in A$

b) Calcul direct.

c) Avem $f\left(7+5\sqrt{2}\right)=-1$. Mai mult, $f\left(\left(7+5\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right)=\left(f\left(7+5\sqrt{2}\right)\right)^{2n+1}=-1,\ \forall n\in\mathbb{N}$,

iar șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\left(7+5\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ are termenii distincți, în $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

Varianta 35 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a**) $f'(x)=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $f''(x)=\dfrac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0\Rightarrow f'$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $a\le 0$ este evident, iar pentru $a>0$ aplicăm regula lui l'Hospital.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ln 1=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1=m$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=0$, deci $y=0$ este o asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $y=x$ este o asimptotă oblică la $-\infty$.

2) **a**) $\mathrm{I}_2=\dfrac{1}{3}\int_0^1\dfrac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}dx=\dfrac{1}{3}\cdot\ln 2$.

b) $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{1+x^3}dx<0$.

c) $0\le \mathrm{I}_n\le\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{I}_n=0$.

Varianta 36 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Prin împărțire se obține că $\frac{1}{7}=0,(142857)$. Atunci $a_1+a_2+a_3+...+a_6=1+4+2+8+5+7=27$.

2. Avem $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2-g(x)=-3x$, iar $(g\circ f)(x)=g(f(x))=3f(x)+2=8-3x$.
Atunci $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)=-3x-(8-3x)=-8, \forall x\in\mathbb{R}$.

3. Fie $f(x)=f(y)\Rightarrow 3x+1=3y+1\Rightarrow x=y$. Rezultă că funcția f este injectivă.

4. Sunt 900 de numere de trei cifre, iar numărul celor divizibile cu 50 este dat de numărul k-urilor cu proprietatea $k\in\mathbb{N}, 100\le 50k<1000$ adică $2\le k<20$. Probabilitatea cerută este $\frac{18}{900}=\frac{1}{50}$.

5. Ecuația dreptei AB este: $y=x-3$. Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow C\in AB \Leftrightarrow a=-4$.

6. Din teorema cosinusului obținem $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=-\frac{1}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Din $A^2=0_2$ obținem sistemul: $\begin{cases} a^2+bc=0\\ b(a+d)=0\\ c(a+d)=0\\ (a-d)(a+d)=0\end{cases}$. Presupunem că $a+d\neq 0$. Rezultă $b=c=0$ și $a=d$. Din prima și din ultima ecuație obținem $a=d=0$, deci $a+d=0$, contradicție.

b) Se arată că $(I_2+A)(I_2-A)=I_2$, deci $(I_2+A)^{-1}=I_2-A$.

c) Matricele de forma $X=\alpha A$, $\alpha\in\mathbb{R}$ sunt soluții.

2. a) Se arată că $f(a)=0$.

b) Notând $x^2=t$ obținem ecuația $t^2-2t+9=0$, ale cărei soluții au $|t_1|=|t_2|=3$.
Rezultă $|x_1|=|x_2|=\sqrt{|t_1|}=\sqrt{3}$, $|x_3|=|x_4|=\sqrt{3}$ și suma căutată este egală cu $4\sqrt{3}$.

c) Evident, $B\subset A$. Fie $\alpha=g(a)\in A$. Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $q,h\in\mathbb{Q}[X]$, cu $\operatorname{grad}(h)\le 3$, astfel încât $g=(X^4-2X^2+9)\cdot q+h$. Rezultă $\alpha=g(a)=h(a)\in B$, deci $A\subset B$.

Varianta 36 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a)** $f'(x)=\dfrac{4}{\left(\sqrt{3}-x\right)^2}$ deci f este strict crescătoare.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=-\sqrt{3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\sqrt{3}\Rightarrow y=-\sqrt{3}$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$.

$x=\sqrt{3}$ este asimptotă verticală.

c) $\operatorname{ctg}\left(a+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\operatorname{ctg}a+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-\operatorname{ctg}a}$ şi astfel rezultă periodicitatea.

2) **a)** $\mathrm{F}'\left(x\right)=f\left(x\right)\Rightarrow \mathrm{F}''\left(x\right)=e^{-x^2}\cdot\left(-2x\right)\Rightarrow 0$ este punct de inflexiune.

b) $\int_0^1 x\cdot f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\cdot\left(-x^2\right)'dx=\dfrac{1-e^{-1}}{2}$.

c) $\int_0^1 \mathrm{F}\left(x\right)\cdot\left(x\right)'=\mathrm{F}\left(x\right)\cdot x\Big|_0^1-\int_0^1 f\left(x\right)\cdot x=-\dfrac{1-e^{-1}}{2}$.

Varianta 37 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. Numerele 1, 4, 7, … ,31 sunt 11 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația 3.

Atunci $1+4+7+...+31=\dfrac{(1+31)\cdot 11}{2}=176$.

2. $\text{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R}\ /\ \exists x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y\}$.

Avem $f(x)=y \Leftrightarrow x^2+x+1-y=0$. Această ecuație are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta\geq 0$.

$\Delta=1-4(1-y)$; $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow y\geq\dfrac{3}{4}$. În concluzie, $\text{Im}(f)=\left[\dfrac{3}{4};\ \infty\right)$.

3. $E=\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

4. Termenii dezvoltării sunt $T_{k+1}=C_5^k\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}\cdot 1^k=C_5^k\sqrt{2^{5-k}}$, $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

Deoarece $C_5^k\in\mathbb{N}$ avem $T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 5-k=\text{par} \Leftrightarrow k\in\{1,3,5\}$. Dezvoltarea are trei termeni raționali.

5. $ABCD$ pătrat $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$. Atunci $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|=2\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=2\sqrt{2}$.

6. Avem: $\sin 75^\circ=\sin\left(45^\circ+30^\circ\right)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$.

$\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Calcul direct.

b) $\det\left(A-A^t\right)=\left(\det\left(A-A^t\right)\right)^t=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$ deci $\det\left(A-A^t\right)=0$.

c) Minorul $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$ este nenul.

2. a) Pentru orice $x\in[0,\infty)$, avem $f(x)=x^3+p\cdot x^2+q\cdot x+r>0$.

b) $S_1=x_1+x_2+x_3=-p$, $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q$.

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p\cdot\left(S_1^2-2S_2\right)-q\cdot S_1-3r=-p^3+3pq-3r$.

c) Fie polinomul $g\in\mathbb{R}[X]$, $g=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc$, cu rădăcinile a,b,c.

Deoarece $p=-(a+b+c)>0$, $q=ab+bc+ca>0$ și $r=-abc>0$, din punctul a) rezultă că rădăcinile a,b,c ale lui g nu sunt în intervalul $[0,\infty)$. Așadar, $a,b,c\in(-\infty,0)$.

Varianta 37 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a)** $f'(x)=3\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)=3\cdot\frac{x^4}{1+x^2}>0.$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ şi f este continuă, deci este surjectivă. Conform (**a**) f este injectivă.

c) Singura valoare pentru n este 3 şi limita este 1.

2) **a)** $\mathrm{I}_1=\int_0^1 x\cdot e^x dx = x\cdot e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=1.$

b) $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n=\int_0^1 e^x\left(x^{n+1}-x^n\right)dx\le 0,$ deci $\left(\mathrm{I}_n\right)_{n\ge1}$ este descrescător şi mărginit inferior de $0.$

c) $\mathrm{I}_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\left(e^x\right)' dx=e-\mathrm{I}_n-n\,\mathrm{I}_n\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{I}_n=e.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Avem $2<3<4 \Rightarrow \log_2 2<\log_2 3<\log_2 4 \Rightarrow 1<\log_2 3<2 \Rightarrow \log_2 3\in(1,2)$.

2. $x^2+3x+m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 9-4m<0 \Leftrightarrow m>\frac{9}{4} \Leftrightarrow m\in\left(\frac{9}{4},\infty\right)$.

3. Avem $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Ecuația devine $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este: $\{2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$ avem $C_n^2+C_n^3=\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{3n!+(n-2)n!}{3!(n-2)!}=\frac{n!(n+1)}{3!(n-2)!}=\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}=C_{n+1}^3$.

5. Avem $d_1\cap d_2=\{A(1;-1)\}$. Atunci $A\in d_3 \Leftrightarrow 1-1+a=0 \Leftrightarrow a=0$.

6. Din teorema cosinusului, $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow BC=\sqrt{13}$.
Perimetrul triunghiului ABC este $AB+BC+AC=7+\sqrt{13}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $A^3=0_3$.

b) Dacă $X=\begin{pmatrix} a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, din $A\cdot X=X\cdot A$ rezultă $g=0$, $d+g=0$, $a=e+h$, $d=h$,
$a+b=f+i$, $d+e=i$ și $g+h=0$. Se obține $g=d=h=0$, $a=e=i$ și $b=f$.

c) Presupunem că există $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $X^2=A$.

Rezultă $A\cdot X=X\cdot A$. Din **b)**, există $a,b,c\in\mathbf{C}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}$.

Din $X^2=A$, rezultă că $\det(X)=0$, deci $a=0$. Se obține $X^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ b^2 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq A$.

2. a) $f(3)-f(1)=a\left(3^4-1\right)+b(3-1)$ și rezultă concluzia.

b) Se obține $f(x)-f(y)=(x-y)\left(a(x+y)\left(x^2+y^2\right)+b\right)$.

c) Înlocuind în b) se obține $b=-85a-1$. Din $f(1)=4$ se obține $c=84a-5$.
Apoi, $f(2)=-70a+3$.
Dacă $a\geq 1$, obținem $f(2)\leq -67$, iar dacă $a\leq -1$, că $f(2)\geq 73$, de unde rezultă concluzia.

Varianta 38 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a)** $f'(x)=2+\frac{2x+1}{x^2+x+1}=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ f$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci f este surjectivă, iar conform punctului (**a**) este injectivă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ dar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=+\infty.$

2) **a)** $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x(1-x)\,dx=\frac{1}{6}.$

b) f este continuă pe $\mathbb{R}$ (în fiecare punct întreg $l_s=l_d=f(a)=0$).

c) f este periodică de perioadă 1, deci $\int_a^{a+1} f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx.$

Varianta 39 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $z^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{z}$.

2. Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = -x^2+4x-3$. Tabelul de semn al lui g este:

x	$-\infty$		1		3		∞
$g(x)$		$- - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - -$	

$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[1;3]$.

3. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{y^2+1}{y} \Rightarrow (x-y)(xy-1)=0 \Rightarrow x=y$ sau $xy=1$.

Dar $x,y\in(1,\infty) \Rightarrow xy>1$. Avem $\begin{cases} x,y\in(1,\infty) \\ f(x)=f(y)\end{cases} \Rightarrow x=y$, deci f este injectivă.

4. O funcție $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par este unic determinată de un tabel de tipul

x	1	2	3
$f(x)$	a	b	c

unde $a\in\{0,2\}$ iar $b,c\in\{0,1,2,3\}$.
Vor fi $2\cdot4\cdot4=32$ funcții cu proprietatea cerută.

5. Din teorema cosinusului, avem $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Atunci $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2} = \frac{5}{2}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

6. $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ-30^\circ) = \sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$

Soluție:

$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1. a) Se calculează $\det(A) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

b) Se arată că unica soluție este $x=y=z=0$.

c) Se obțin soluțiile $(\alpha,-\alpha,0)$, cu $\alpha\in\mathbb{C}$.

2. a) $9,4\in\mathbb{Z}$ și $9^2-5\cdot4^2=1$, deci $z\in M$

b) Se arată ușor că $\forall\, z_1,z_2\in M$, avem $z_1\cdot z_2\in M$ și $z_1^{-1}\in M$.

c) Se demonstrează că pentru $z=9+4\sqrt{5}\in M$, $\forall\, k,n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\neq k$, avem $z^n\neq z^k$.

Varianta 39 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a)** $f'(x) = \ln x + 1.$

Pe intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, f este strict descrescătoare, iar intervalul $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, f este strict crescătoare.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$. Deci f nu are asimptote.

c) Se arată că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit şi monoton $(x_{n+1} < x_n)$.

2) **a)** $\mathrm{I}_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{4x+5} dx = \frac{1}{8} - \frac{5}{16} + \frac{25}{64} \cdot \ln \frac{9}{5}.$

b) $4\mathrm{I}_{n+1} + 5\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n(4x+5)}{4x+5} dx = \frac{1}{n+1}.$

c) $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \le 0 \to \frac{1}{9(n+1)} \le \mathrm{I}_n \le \frac{1}{9n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\,\mathrm{I}_n = \frac{1}{9}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Avem $z=\frac{4a}{4+a^2}+\frac{4-a^2}{4+a^2}i$. Atunci $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0\Leftrightarrow 4-a^2=0\Leftrightarrow a=\pm 2$.

2. Rezolvăm sistemul $\begin{cases}2x+3=y\\ x^2-4x+12=y\end{cases}$ și obținem o singură soluție: $\begin{cases}x=3\\ y=9\end{cases}$. Rezultă că dreapta de ecuație $y=2x+3$ este tangentă la parabola de ecuație $y=x^2-4x+12$ în punctul $P(3,\,9)$.

3. Se impun condițiile $2x-1\geq 0$ și $x\geq 0$, adică $x\in\left[\frac{1}{2},\,\infty\right)$.

Prin ridicare la pătrat ecuația devine $2x-1=x^2\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

4. Produsul cartezian $A\times A$ are 36 de elemente: $A\times A=\{(1,\,1),\,(1,\,2),.....,(6,\,6)\}$.

Cazurile favorabile sunt $(1,5)$, $(5,1)$, $(2,3)$, $(3,\,2)$ și $(3,3)$. Probabilitatea cerută este $\frac{5}{36}$.

5. $\overrightarrow{MA}=-\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{MB}=2\vec{i}+2\vec{j}\Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{i}+5\vec{j}\Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\sqrt{26}$.

6. Avem succesiv: $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=$
$=\sin^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\sin^2 b=\sin^2 a\left(1-\sin^2 b\right)-\left(1-\sin^2 a\right)\sin^2 b=\sin^2 a-\sin^2 b$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se arată că $S=0_3$.

b) Se calculează $A^2=14\cdot A$, apoi $B\cdot C=I_3+(15a+1)\cdot A$ și se obține $a=-\frac{1}{15}$.

c) Se demonstrează prin inducție după $n\in\mathbb{N}^*$.

2. a) Deoarece $0=\varepsilon^3-1=(\varepsilon-1)\left(\varepsilon^2+\varepsilon+1\right)$ și $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, rezultă concluzia.

b) Determinantul sistemului este $\Delta=(\varepsilon-1)\left(\varepsilon^2-1\right)\left(\varepsilon^2-\varepsilon\right)\neq 0$, deci sistemul are doar soluția nulă $x=y=z=0$.

c) Din ipoteză, există $g\in\mathbb{C}[X]$, astfel încât $f_1\left(X^3\right)+Xf_2\left(X^3\right)+X^2f_3\left(X^3\right)=\left(X^3-1\right)\cdot g(X)$.

Deoarece numerele 1, ε și ε^2 sunt rădăcinile polinomului X^3-1, se obține sistemul

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=0\\ a_1+a_2\cdot\varepsilon+a_3\cdot\varepsilon^2=0\\ a_1+a_2\cdot\varepsilon^2+a_3\cdot\varepsilon=0\end{cases},\ \text{unde}\ a_k=f_k(1),\ \forall k\in\{1,2,3\}.$$

Folosind punctul **b)** se deduce că $f_k(1)=0$, $\forall k\in\{1,2,3\}$, de unde rezultă concluzia.

Varianta 40 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1) **a**) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0,\ \forall x<0.$

b) $f''(x)=\dfrac{2}{(x^2+2)\sqrt{(x^2+2)}}-\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)}}=\dfrac{2t\cdot\sqrt{t}-(t+1)\sqrt{t+1}}{(t+1)\cdot t\cdot\sqrt{t(t+1)}}$, unde $t=x^2+1$.

Se arată că există un singur t pentru care numărătorul este 0, deci două valori pentru x.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ este asimptotă la $-\infty$.

2) **a**) $F_1(\pi)=\pi$ (se integrează prin părți).

b) $F_{n+1}(1)-F_n(1)=\int_0^1 t\cdot\sin^2 t\cdot(\sin t-1)\,dt<0.$

c) $0\le F_n(1)\le\int_0^1 t^{n+1}dt=\dfrac{1}{n+2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}F_n(1)=0.$

Varianta 41 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie

1. Avem $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}=\left(10^{\lg 2}\right)^2+\sqrt[3]{(-3)^3}=2^2+(-3)=1$.

2. $\operatorname{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R}\ /\ \exists x\in\mathbb{R}$ aşa încât $f(x)=y\}$.

Pentru $y=0$ avem $f(0)=0$, iar pentru $y\neq 0$ avem: $f(x)=y \Leftrightarrow yx^2-2x+y=0$. Această ecuaţie are soluţii reale dacă şi numai dacă $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4-4y^2\geq 0$, adică $y\in[-1;\,1]$. În concluzie, $\operatorname{Im}(f)=[-1;\,1]$.

3. Notând $3^x=y$ ecuaţia devine: $3y=-y+8$ de unde obţinem $y=2$. Avem $3^x=2 \Leftrightarrow x=\log_3 2$.

4. O funcţie $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ cu proprietatea $f(1)=f(3)$ este unic determinată de un tabel de tipul

x	1	2	3	4
$f(x)$	a	b	a	c

unde $a,b,c\in\{1,2,3,4\}$.

Vor fi $4^3=64$ funcţii cu proprietatea cerută.

5. Fie d drepta ce trece prin $O(0,\,0)$ şi este paralelă cu dreapta AB.

Un vector director al dreptei d este $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$. Ecuaţia dreptei d este $\frac{x}{-3}=\frac{y}{2} \Leftrightarrow 2x+3y=0$.

6. Ridicând la pătrat cele două egalităţi din ipoteză, se obţin relaţiile :

$\cos^2 a+\cos^2 b+2\cos a\cos b=\frac{1}{4}$ şi $\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b=1$. Adunând membru cu membru aceste două egalităţi obţinem $2+2(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=\frac{4}{3}$, adică $2+2\cos(a-b)=\frac{4}{3}$ de unde rezultă $\cos(a-b)=-\frac{1}{3}$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie:

1. a) Calcul direct

b) Prin calcul direct se obţine unica soluţie $\begin{cases} x=pqr \\ y=-(pq+qr+rp) \\ z=p+q+r \end{cases}$.

c) Numerele p, q, r verifică aceeaşi ecuaţie de grad trei $x^3-x^2-x+1=0$, cu soluţiile $x_1=x_2=1$, $x_3=-1$, deci $p=q=1$ sau $p=r=1$ sau $q=r=1$.

2. a) Se obţine $A^4=I_4$.

b) $G=\{I_4, A, A^2, A^3\}$ şi se verifică uşor axiomele grupului comutativ.

c) Dacă $X\in G$, avem $X^4=I_4$, şi din ecuaţia iniţială obţinem $X^4=X$, deci $X=I_4$.

rezolvare

1a) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}<0, \forall x>0$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=\infty(0-1)=-\infty, \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln 1=0$. În plus, f este continuă, deci are proprietatea lui Darboux. Astfel, mulțimea valorilor funcției este $(-\infty,0)$.

c) Funcția este continuă, deci nu are asimptote verticale în punctele domeniului de definiție. În 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln 1=0$, deci nici aici nu există asimptotă verticală. În sfârșit, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x)=\infty$, deci nu există asimptotă oblică spre ∞.

2a) $\int_0^1 f(x)\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}dx=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\dfrac{\pi-2\ln 2}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int\limits_1^x f(\ln t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(\ln x)}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}(\ln x)=\dfrac{\pi}{2}$, folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$ și faptul că pentru funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_1^x f(\ln t)dt$ are derivata $g'(x)=f(\ln x)$.

c) $s_n=\dfrac{1}{n}\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{3}{n}\right)+...+f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$ este sumă Riemann atașată funcției f, intervalului $[0,1]$, diviziunii $D_n=\left(0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},...,\dfrac{n}{n}\right)$ și punctelor intermediare $X_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},...,\dfrac{n}{n}\right)$. Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{\pi-2\ln 2}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Fie $a=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}$. Prin calcul direct obținem $a=\frac{20}{27}\Rightarrow [a]=0$.

2. Scăzând cele două ecuații obținem $x^2+4x+3=0$ de unde $x=-1$ sau $x=-3$.
Sistemul are două soluții: $\begin{cases}x=-1\\ y=5\end{cases}$ și $\begin{cases}x=-3\\ y=19\end{cases}$.

3. Avem $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$, de unde $x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

4. Termenii dezvoltării sunt $T_{k+1}=C_{100}^{k}\left(\sqrt{2}\right)11^{100-k}\cdot 1^k=C_{100}^{k}\sqrt{2^{100-k}}$, $k\in\{0,1,2,...,100\}$.

Deoarece $C_{100}^{k}\in\mathbb{N}$ avem $T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 100-k=\text{par}\Leftrightarrow k\in\{0,2,4,...,98,100\}$.
Dezvoltarea are 51 de termeni raționali.

5. Avem $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=4\vec{i}-8\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow A,B,C$ sunt coliniare.

6. Aria triunghiului dat este $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde $a=4,\ b=5,\ c=7$ și $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Obținem $p=8$ și $S=4\sqrt{6}$. Atunci $r=\frac{S}{p}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) $rang\left(A_0\right)=1$.
b) Calcul direct.
c) Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$,
$$C_n\overset{not}{=}A^nB-BA^n=A^{n-1}(AB-BA)+\left(A^{n-1}B-BA^{n-1}\right)A\overset{ip}{=}A^{n-1}\cdot A+C_{n-1}\cdot A.$$
Folosind relația anterioară, se demonstrează prin inducție concluzia.

2. a) Avem $f(-1)=f(1)=0$ și obținem $a=-4$ și $b=12$.
b) Deoarece ecuația are coeficienți reali, dacă admite rădăcina $x_1=i$, va avea și rădăcina $\overline{x_2}=-i$, deci polinomul f se va divide cu $(X-i)(X+i)=X^2+1$, adică $a=4$ și $b=-12$.
c) Rădăcinile x_1,x_2,x_3 sunt în progresie aritmetică, deci există $z,r\in\mathbb{C}$ astfel încât $x_1=z-r$, $x_2=z$ și $x_3=z+r$. Obținem $x_1+x_2+x_3=3z=3$, deci $z=1$.
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(1-r)^2+1+(1+r)^2=11$, deci $r\in\{-2,2\}$, iar rădăcinile sunt $-1,1,3$.
În final, $a=4\cdot\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=-4$ și $b=-4x_1x_2x_3=12$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

rezolvare

1a) $f'(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$, $f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) + \dfrac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$, folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$. Obținem $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$, ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$.

c) Avem $x_2 = \dfrac{\pi}{4} < 1 = x_1$ şi demonstrăm inductiv că şirul este strict descrescător. Cum el este şi cu termeni pozitivi, rezultă că este convergent.

2a) $\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx = \dfrac{1}{30}$.

b) $I_n = \dfrac{2x-1}{2}(x-x^2)^n \Big|_0^1 + \int_0^1 \dfrac{n}{2}(2x-1)^2(x-x^2)^{n-1}dx = \dfrac{n}{2}\int_0^1\left((x-x^2)^{n-1} - 4(x-x^2)^n\right)dx = \dfrac{n}{2}I_{n-1} - 2nI_n$.

c) Din **b**), $I_n < \dfrac{1}{4}I_{n-1}$. De aici rezultă inductiv $I_n < \dfrac{1}{4^n}I_0 = \dfrac{1}{4^n}$. Cum $I_n > 0$, limita cerută este 0.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie

1. Fie $a=\sqrt{2}$ şi $b=-\sqrt{2}$. Avem $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $a+b=0\in\mathbb{Q}$. Afirmaţia din enunţ este falsă.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ unde $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi $a\neq 0$. Avem $f(1)=-3,\ f(-1)=3,\ f(0)=1$ şi rezolvând sistemul obţinem $a=-1,\ b=-3,\ c=1\Rightarrow\ f(x)=-x^2-3x+1$.

Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, adică $V\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{4}\right)$.

3. Notăm $2^x=y$ şi obţinem ecuaţia $y^2-y-12=0$ cu soluţiile $y_1=-3$ şi $y_2=4$.
$2^x=-3$ nu are soluţii, iar $2^x=4\ \Leftrightarrow\ x=2$.

4. Produsul cartezian $A\times A$ are 36 de elemente: $A\times A=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),.....,(6,\ 6)\}$.
Fie $(a,b)\in A\times A$. Produsul $a\cdot b$ este impar dacă şi numai dacă *a* şi *b* sunt impare.
Cazurile favorabile sunt: $(1,1)$, $(1,3)$, $(1,5)$, $(3,1)$, $(3,3)$, $(3,5)$, $(5,1)$, $(5,3)$ şi $(5,5)$.
Probabilitatea cerută este $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0,25$.

5. Mijlocul diagonalei $[AC]$ este $M(0,\ 2)$, iar panta dreptei AC este1. BD este mediatoarea lui $[AC]$. Ecuaţia dreptei *BD* este $y=-x+2$. Fie $B(a,b)$ şi $D(c,d)\Rightarrow\ b=-a+2,\ d=-c+2\Rightarrow b-d=-(a-c)$.
Cum $M(0,\ 2)$ este mijlocul $[BD]\Rightarrow a+c=0$ şi $b+d=4$, iar din $BD=AC\Rightarrow\ (a-c)^2+(b-d)^2=8$.
Se obţine $B(-1,3)$ şi $D(1,1)$ sau invers, $B(1,1)$ şi $D(-1,3)$.

6. Avem $\sin 105^\circ=\sin\left(45^\circ+60^\circ\right)=\sin 45^\circ\cdot\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 60^\circ$.

Rezultă că $\sin 105^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie

1. Patru matrice, şi anume $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) $\det(A)=1\neq 0$, deci matricea A este inversabilă. Se obţine $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\notin M$.

c) Fie $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M$ inversabilă, cu $B^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in M$. $B\cdot B^{-1}=I_2\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}ax+bz=1\\ ay+bt=0\\ cx+dz=0\\ cy+dt=1\end{cases}$.

Deoarece $a,b,c,d\in\mathbb{N}$, se obţin soluţiile $D_1=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $D_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. a) Adunând relaţiile lui Viète, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{a}{1}$ şi

$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{8}{1}$ şi grupând, obţinem concluzia.

b) Avem $x_1+x_4=x_2+x_3=4$. Folosind a treia relaţie a lui Viète, obţinem $x_1x_4+x_2x_3=-2$.
Din a doua relaţie a lui Viète, obţinem $a=14$.

c) x_1,x_2,x_3,x_4 sunt în progresie aritmetică, deci există $z,r\in\mathbb{C}$, astfel încât $x_1=z-3r$, $x_2=z-r$, $x_3=z+r$ şi $x_4=z+3r$. Avem $x_1+x_4=x_2+x_3=4$, deci $z=2$ şi din b) obţinem $a=14$ şi $x_1x_4+x_2x_3=-2$. Rezultă $r^2=1$ şi $b=-15$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

1a) $f'(x) = 1 - e^{-x} > 0, \forall x > 0$.

b) Derivata este pozitivă pe $[0,\infty)$ și negativă pe $(-\infty,0]$, deci avem doar punctul de extrem 0.

c) Din $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ și **b)** rezultă că, pentru orice m, ecuația are soluție unică.

2a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln 2$.

b) Dacă F este o primitivă a funcției $t \to \frac{t}{1+t^2}$, atunci $f(x) = F(\operatorname{tg} x) - F(1)$, deci $f'(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x)F'(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x$.

c) Raționând ca mai sus, $f'(x) + g'(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = 0$. Rezultă $f(x) + g(x) = \text{constant} = 0$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $z=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}=-i \Rightarrow \operatorname{Im}(z)=-1$.

2. Avem $x^2+mx+1\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow m\in(-2,2)$.

3. $\arcsin 2x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\in[-1,1]$ și $\sin\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2x$. Soluția ecuației este $x=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{2}$.

4. Mulțimea A conține 5 elemente pare și 5 impare. Dacă o submulțime cu 5 elemente a lui A conține două elemente pare, rezultă că celelalte trei elemente sunt impare. Putem alege 2 elemente pare din cele 5 în C_5^2 moduri, iar 3 elemente impare din cele 5 pot fi alese în C_5^3. Numărul cerut în enunț este $C_5^2\cdot C_5^3=100$.

5. Ecuația dreptei BC este $4x+3y-2=0$. Atunci $d(O, BC)=\dfrac{|4\cdot 0+3\cdot 0-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{2}{5}$.

6. $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow \cos\alpha<0$ și atunci $\cos\alpha=-\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{4}{5}$.

$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Se arată că $AB=BA=O_4$, deci $AB+BA=O_4$

b) Se arată că $\operatorname{rang}(A+B)=2$ și $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}B=1$.

c) Se demonstrează folosind faptul că $AB=BA=O_4$ și binomul lui Newton.

2. a) Deoarece $f(-1)=0$, se obține $a=6$.

b) Observăm că $x_0=0$ nu este rădăcină pentru f.

Pentru $i\in\{1,2,3,4\}$, x_i e rădăcină a lui $f \Leftrightarrow x_i^4+ax_i^3+4x_i^2+1=0 \Leftrightarrow 1+a\cdot\dfrac{1}{x_i}+4\dfrac{1}{x_i^2}+\dfrac{1}{x_i^4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_i}$ este rădăcină a lui g.

c) Din $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i^2}=-8<0$ rezultă concluzia.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

1a) $f'(x)=\dfrac{a\sqrt{x^2+x+1}-(ax+b)\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}=\dfrac{(a-2b)x+2a-b}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

b) Trebuie ca $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă funcția liniară de la numărătorul derivatei este constantă și pozitivă, adică $a=2b>0$.

c) Conform **b)**, în acest caz funcția este strict crescătoare. Cum funcția este și continuă, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$, mulțimea valorilor funcției este $(-2,2)$.

2a) $f'(x)=e^{\arcsin x}>0, \forall x\in[-1,1]$.

b) Cu schimbarea de variabilă $t=\sin u, dt=\cos u du$ obținem $f(x)=\int_0^{\arcsin x} e^u \cos u du$.

c) $f(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \cos u du = e^u \sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \sin u du = e^{\frac{\pi}{2}} + e^u \cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \cos u du = e^{\frac{\pi}{2}}+1-f(1)$.

Rezultă $f(1)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{2}$.

Varianta 45 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\dfrac{7}{5\sqrt{2}-1}=\dfrac{7\left(5\sqrt{2}+1\right)}{50-1}=\dfrac{5\sqrt{2}+1}{7}\in(1,\,2)\Rightarrow\left[\dfrac{7}{5\sqrt{2}-1}\right]=1$.

2. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\dfrac{(-1)^2-2(-1)}{-1}=-3\in\mathbb{Z}$.

3. Ecuația este echivalentă cu $2\cdot 3^x+\dfrac{3}{3^x}=7$. Făcând substituția $y=3^x$ obținem ecuația $2y^2-7y+3=0$ cu soluțiile 3 și $\dfrac{1}{2}$. Avem $3^x=3\Leftrightarrow x=1$, iar $3^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\log_3 2$.

4. Funcția f este strict crescătoare $\Leftrightarrow f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$.
Orice submulțime a lui *B* poate fi ordonată crescător într-un singur mod. Numărul funcțiilor strict crescătoare $f:A\to B$ este egal cu numărul submulțimilor cu 4 elemente ale mulțimii *B*, adică $C_6^4=15$.

5. Ecuația dreptei *BC* este $2x-y+5=0$. Lungimea înălțimii duse din vârful *A* în triunghiul *ABC* este
$d(A,\,BC)=\dfrac{|2\cdot 1-3+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

6. $E=2\left(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ\right)=4\sin\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}=4\sin 30^\circ\cos 45^\circ=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție:

1. a) Se arată că $AB=BA=\begin{pmatrix}2&0\\5&2\end{pmatrix}$.

b) Calcul direct.

c) Dacă X este o soluție a ecuației, obținem că $X\in C(A)$, deci există $x,y\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}x&0\\y&x\end{pmatrix}$. Rezultă $\begin{pmatrix}x^2+x&0\\2xy+y&x^2+x\end{pmatrix}=A$, deci $\begin{cases}x^2+x-2=0\\(2x+1)y=3\end{cases}$, adică $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$.

Se obțin soluțiile $X_1=B$, $X_2=\begin{pmatrix}-2&0\\-1&-2\end{pmatrix}$.

2. a) Fie $x,y\in G$. Avem $1+xy\in(0,2)$, deci $1+xy>0$.

Atunci, $x*y\in G \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(y+1)>0\\(x-1)(y-1)>0\end{cases}$, adevărat.

b) Calcul direct.

c) $f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*\ldots*\dfrac{1}{9}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{8}{10}=\dfrac{1}{45}$.

Din $\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{1}{45}$ rezultă $x=\dfrac{22}{23}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

1a) $f'(x)=\dfrac{(2x+a)\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x^2+ax+5)}{x^2+1}=\dfrac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) Trebuie ca ecuația $x^3-3x=-a$ să aibă trei soluții. Pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^3-3x$ avem

x	$-\infty$		-1		1		∞
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	∞

Astfel, ecuația $g(x)=-a$ are trei soluții pentru $a\in(-2,2)$. Se verifică imediat, folosind semnul lui f', că, în acest caz, funcția f are trei puncte de extrem.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}+0=0$,

deci avem asimptota oblică spre ∞ dată de ecuația $y=x$.

2a) $\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\dfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}=0$ (sau observăm că este integrala u nei funcții impare).

b) $V=\pi\int_{-1}^{1}f^2(x)dx=\pi\left(x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{4\pi}{3}$.

c) $0\le\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$, deci limita cerută, conform teoremei cleștelui, este 0.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Fie r rația progresiei. Avem $a_6 = a_3 + 3r$ și $a_{16} = a_{19} - 3r$, deci $a_6 + a_{16} = a_3 + a_{19} \Rightarrow a_6 + a_{16} = 10$.

2. Ecuația dată are două rădăcini reale distincte dacă și numai dacă $\Delta > 0$. Avem $\Delta = m^2 + 4m - 4$.
$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+2\sqrt{2}, +\infty\right)$.

3. Făcând substituția $\lg x = y$, ecuația devine $y^2 + y - 6 = 0$ de unde obținem $y_1 = 2$, $y_2 = -3$.
Avem $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$, iar $\lg x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1000}$.

4. Funcția f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow f(1) > f(2) > f(3)$.
Orice submulțime a lui B poate fi ordonată descrescător într-un singur mod. Numărul funcțiilor strict descrescătoare $f : A \to B$ este egal cu numărul submulțimilor cu 3 elemente ale mulțimii B, adică este egal cu $C_5^3 = 10$.

5. Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ} = (a-2)\vec{i} + (b+1)\vec{j}$ și $\overrightarrow{NP} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a - 2 = 1$ și $b + 1 = 2$. Punctul căutat este $Q(3, 1)$.

6. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2$ de unde obținem
$AM^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\cos A\right)$. Din teorema cosinusului avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos A \Rightarrow 2AB\cdot AC\cos A = AB^2 + AC^2 - BC^2$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

Atunci $AM^2 = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$, de unde $AM = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

1. a) Calcul direct.

b) Din $A^2 = 0_2$ obținem sistemul: $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ (a-d)(a+d) = 0 \end{cases}$. Presupunem că $a + d \neq 0$. Rezultă $b = c = 0$ și $a = d$. Din prima și din ultima ecuație din sistem rezultă $a = d = 0$, deci $a + d = 0$, contradicție.

c) Din punctul b) avem că $a + d = 0$ și din $A^2 = 0_2$ deducem $\det\left(A - x\cdot I_2\right) = x^2$.
Obținem $\det\left(A + 2I_2\right) = 4$.

2. a) $(a,15) \in G \Leftrightarrow a^2 - 3\cdot 15^2 = 1$. Se obține $a \in \{-26, 26\}$.

b) Pentru $(a,b),(c,d) \in G$, avem $ac + 3bd, ad + bc \in \mathbb{Z}$ și
$(ac+3bd)^2 - 3(ad+bc)^2 = \left(a^2 - 3b^2\right)\left(c^2 - 3d^2\right) = 1$.

c) Se verifică axiomele grupului. Se arată că elementul neutru este $(1,0) \in G$ și $\forall (a,b) \in G$, simetricul acestuia este $(a,-b) \in G$.

Varianta 46 - rezolvari mate MT1

rezolvare

1a) $f_d'(1) = \lim\limits_{x\searrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} = 1$ şi $f_s'(1) = \lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x\nearrow 1} \dfrac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}} = -1$.

b)

x	0		1		e^2		∞
$f'(x)$	|	$-$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2/e$	$\searrow$	0

Pentru $m<0$ nu avem soluții, pentru $m=0$ sau $m>2/e$ avem o soluție, pentru $m=2/e$ avem două soluții, iar pentru $0<m<2/e$ avem trei soluții.

c) Deoarece $1<3<5<e^2$ şi funcția este strict crescătoare pe $[1,e^2]$, avem $f(3)<f(5)$.

2a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin 2t\,dt = -\dfrac{1}{2}t\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Dacă F este o primitivă a funcției $t \to \arccos\sqrt{t}$, atunci $g(x) = F(\cos^2 x) - F(0)$, deci $g'(x) = -2\sin x\cos x F'(\cos^2 x) = -\sin 2x \arccos(\cos x) = -x\sin 2x.$

c) $f'(x)+g'(x)=0 \Rightarrow f(x)+g(x) =$ constant $= f(0)+g(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $(2+i)^4+(2-i)^4=\left((2+i)^2\right)^2+\left((2-i)^4\right)^2=(3+4i)^2+(3-4i)^2=-7+24i-7-24i=-14$.

2. Sistemul $\begin{cases} y=x^2+x+1 \\ y=2x+1 \end{cases}$ are două soluții: $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ și $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$. Dreapta de ecuație $y=2x+1$ intersectează parabola de ecuație $y=x^2+x+1$ în punctele $A(0,\ 1)$ și $B(1,\ 3)$.

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3^x+9^x$. Se observă că $f(-1)=\dfrac{4}{9}$.

Funcția f este strict crescătoare $\Rightarrow$ f este injectivă $\Rightarrow$ ecuația $f(x)=\dfrac{4}{9}$ are cel mult o soluție.

În concluzie, ecuația inițială are soluție unică $x=-1$.

4. Sunt 9000 de numere naturale cu 4 cifre. Numărul celor divizibile cu 9 este dat de numărul k-urilor cu $1000\le 9k\le 9999 \Leftrightarrow 111,(1)\le k\le 1111$, deci există 1000 astfel de numere. Probabilitatea cerută este $\dfrac{1}{9}$.

5. Centrul de greutate al triunghiului *ABC* este $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3},\ \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$, adică $G(1,\ 2)$.

Ecuația dreptei *OG* este $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2} \Leftrightarrow y=2x$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

6. $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ=2\cos\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}=2\cos 30^\circ\cos 45^\circ=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Soluție:

1. a) $\det(A)=-2\neq 0$, deci $rang(A)=2$.

b) Se arată că $f(B)=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $A\cdot(C+D)-(C+D)\cdot A=(AC-CA)+(AD-DA)$.

2. a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-2a^2$.

b) x_1 e o rădăcină a polinomului $f \Leftrightarrow f(x_1)=0 \Leftrightarrow x_1^3+a^2x_1-a=0 \overset{x_1^3\neq 0}{\Leftrightarrow} 1+\dfrac{a^2}{x_1^2}-\dfrac{a}{x_1^3}=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{x_1}$ este o rădăcină a polinomului g.

c) Notăm cu $\dfrac{1}{x_1}$, $\dfrac{1}{x_2}$ și $\dfrac{1}{x_3}$ rădăcinile polinomului g.

Deoarece $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2a^2<0$, rezultă că f are o singură rădăcină reală, de exemplu x_1.

Atunci, $\dfrac{1}{x_1}\in\mathbb{R}$ este unica rădăcină reală a lui g. Presupunem că $x_1=\dfrac{1}{x_1}$, deci că $x_1\in\{-1,1\}$.

Dacă $x_1=-1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(-1)=0$ deducem $a^2+a+1=0$, fals.

Dacă $x_1=1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(1)=0$ deducem $a^2-a+1=0$, fals.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

1a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$

b) Din cele de mai sus, dreapta $y = \dfrac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

c) Deoarece arctg este funcție strict crescătoare, funcția dată are aceleași puncte de extrem local ca și funcția $g:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, adică $x=0$.

2a) $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{x}{x^2+1} = f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$.

c) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ reprezintă sume Riemann asociate funcției f, diviziunilor $D_n = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n}{n}\right)$ și punctelor intermediare $X_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n}{n}\right)$. Deoarece funcția este integrabilă, fiind continuă, iar șirul normelor diviziunilor tinde la 0, șirul $(a_n)_n$ este convergent.

Varianta 48 - rezolvari mate MT1

Soluţie

1. Fie z numărul din enunţ. Avem $z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$. Folosind formula lui Moivre, obţinem: $z=\cos\pi+i\sin\pi=-1 \Rightarrow \operatorname{Re}(z)=-1$.

2. $(f\circ f)(512)=f\left(f(512)\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{f(512)}}=\sqrt[9]{512}=\sqrt[9]{2^9}=2$.

3. Utilizând formula $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, ecuaţia devine $2\sin^2 x-\sin x-1=0$. Notăm $y=\sin x$ şi obţinem ecuaţia $2y^2-y-1=0$ cu soluţiile $-\frac{1}{2}$ şi 1.

$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, iar $\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Fiecare submulţime cu trei elemente a lui M poate fi ordonată strict crescător într-un singur mod. Numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$ este egal cu numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii M, adică $C_7^3=35$.

5. Fie $d_1: x+2y-6=0$ şi $d_2: 2x+4y-11=0$. Deoarece $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\neq\frac{-6}{-11} \Rightarrow d_1 // d_2$. Punctul $A(0,3)$ se află pe dreapta d_1. Atunci distanţa cerută este $d(d_1,d_2)=d(A,d_2)=\frac{|2\cdot 0+4\cdot 3-11|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

6. Avem $\overrightarrow{AD}^2=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2=4$, iar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\cos 60^\circ=1$.

Atunci $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=5$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie:

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta=-5a+20$. Obţinem $a=4$.

b) Dacă $\Delta\neq 0$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil.

Pentru $\Delta=0$, deci pentru $a=4$, un minor principal este $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}$, iar sistemul este incompatibil dacă şi numai dacă $\Delta_c=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & b\end{vmatrix}\neq 0$, adică pentru $b\neq 4$.

c) Din $x+z=2y$ şi din prima ecuaţie rezultă $y=\frac{1}{4}$. Din primele două ecuaţii deducem $x=\frac{3}{4}$, $z=-\frac{1}{4}$ şi din ecuaţia a treia, singura condiţie este $a+4b=20$, verificată de o infinitate de perechi $(a,b)\in\left\{(20-4b,b)\,\middle|\,b\in\mathbb{R}\right\}$.

2. a) $A\in G \Leftrightarrow \begin{cases}\cos t=0\\ \sin t=a\end{cases}$. Obţinem $a\in\{-1,1\}$.

b) Calcul direct.

c) Se verifică axiomele grupului.

Elementul neutru este $X(0)=I_2$ şi pentru $X(t)\in G$, $\left(X(t)\right)^{-1}=X(-t)\in G$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$.

b) Funcția este derivabilă pentru $-1 < \dfrac{2x}{1+x^2} < 1$, adică $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. În punctele ± 1, derivatele laterale sunt diferite, deci funcția nu este derivabilă.

c) Deoarece arcsin este funcție strict crescătoare, punctele de extrem ale funcției f coincid cu cele ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Acestea sunt ± 1.

2a) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\dfrac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{2}{3}$.

b) $V = \pi\int_0^1 (1-x^2)dx = \dfrac{2\pi}{3}$.

c) $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ sunt sume Riemann pentru funcția f, diviziunile $D_n = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n}{n}\right)$ și punctele intermediare $X_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n}{n}\right)$. Deoarece funcția este integrabilă și șirul normelor diviziunilor tinde la 0, șirul sumelor Riemann este convergent.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\log_9 3+\log_4 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

2. $\Delta=-3m^2-6m+9$

$f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\le 0\\ m+2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\in(-\infty;-3]\cup[1;\infty)\\ m\in(-\infty;-2)\end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;-3]$.

3. $2^x+2^{x+1}+2^{x-1}=56 \Leftrightarrow 2^x\left(1+2+\frac{1}{2}\right)=56 \Leftrightarrow 2^x=16 \Leftrightarrow x=4$.

4. Dacă $n\in\mathbb{N}$, atunci $\sqrt[3]{n}\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow$ n este cub perfect. În mulțimea A sunt 10 cuburi perfecte: 1^3, 2^3, ..., 10^3.

Probabilitatea cerută este $\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}=0,01$.

5. Cum $\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MB}$, rezultă că $M\in(BC)$ și $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{3}$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{BM}{BC}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

6. $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{3}{5}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $\det A=1+a^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) $x=\frac{1}{1+a^2}$, $y=\frac{a}{1+a^2}$, $z=\frac{a^2}{1+a^2}$ care sunt în progresie geometrică

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+a^2} & \frac{-a}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2}\\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} & \frac{-a}{1+a^2}\\ \frac{-1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2}\end{pmatrix}$

2. a) Se obține $e=6$.

b) Se arată că corespondența este o lege de compoziție pe G. Se verifică apoi axiomele grupului.

Se obține că elementul neutru este $e=6$, iar simetricul lui $x\in G$ este $x'=5+\frac{1}{x-5}\in G$.

c) Notăm $\begin{cases}x-5=a>0\\ y-5=b>0\\ z-5=c>0\end{cases}$ și obținem sistemul $\begin{cases}ab=c\\ bc=a\\ ca=b\end{cases}$, cu unica soluție $a=b=c=1$.

Singura soluție a sistemului inițial este $x=y=z=6$.

Varianta 49 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

rezolvare

1a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, deci avem asimptota orizontală $y=0$ spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2-12}{x^4} \Rightarrow$ funcția este strict descrescătoare pe $[1,2]$ și strict crescătoare pe $[2,\infty)$.

Mulțimea valorilor funcției este $[f(2),f(1)]=[-1,1]$.

c) Funcția este derivabilă pe $(2,\infty)$, deoarece, pe acest interval, $-1<f(x)<0$, f este derivabilă și arccos este derivabilă. În punctul 2, $g'(2)=\lim_{x\searrow 2} g'(x)=\infty$, deci g nu este derivabilă.

2a) $F'(x)=f(x)$.

b) $\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\left(\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\right)=\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}2\right)$.

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2+(n+k)^2}}=\int_1^2 f(x)dx=-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)\Big|_1^2=\ln\frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$.

Varianta 50 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $2008 = 334 \cdot 6 + 4$. Grupăm termenii sumei câte 6.
Avem $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2008} = 334(7+6+9+2+3+0) + (7+6+9+2) = 334 \cdot 27 + 24 = 9042$.

2. Rezolvăm sistemul $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Subsituind y în a doua ecuație se obține

$x^2 - x + 2 = 0$ cu $\Delta = -7 < 0$. În concluzie sistemul nu are soluții în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că dreapta de ecuație $y = 2x - 1$ nu intersectează parabola de ecuație $y = x^2 + x + 1$.

3. Se impune condiția $x > 0$. Avem : $\log_2 x + \log_4 x^2 = 6 \Leftrightarrow \log_2 x + 2 \cdot \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = 6 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$.

4. Putem alege 3 fete din cele 13 în C_{13}^3 moduri. La fiecare alegere a fetelor putem alege 2 băieți din cei 12 în C_{12}^2 moduri. Comitetul clasei poate fi ales în $C_{13}^3 \cdot C_{12}^2 = 18876$ moduri.

5. Avem $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{CD} = (a-1)\vec{i} + \vec{j}$. Atunci $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow -3(a-1) + 2 = 0$

Se obține $a = \dfrac{5}{3}$.

6. Cum $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha < 0$, deci $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \dfrac{16}{25}} = -\dfrac{3}{5}$.

$tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = -2$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $A^t = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ și obținem $B = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}$.

b) Se obține $\det(B) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \geq 0$

c) Punctele P_1, P_2, P_3, O sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0, \ \forall k, t \in \{1, 2, 3\}$.

$\det(B) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0, \ \forall t, k \in \{1, 2, 3\}, \ t \neq k$ și rezultă concluzia.

2. a) Numărul elementelor mulțimii este $|\mathbb{Z}_5|^{|L|} = 5^2 = 25$, unde $L = \{a, b\} \subset \mathbb{Z}_5$.
b) Calcul direct.
c) Se verifică axiomele grupului. Pentru $a, b \in \mathbb{Z}_5$, notăm $A(a,b) = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Elementul neutru este $I_3 = A(\hat{0}, \hat{0})$, iar simetrica matricei $A(a,b)$ este matricea $A(-a, -b)$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

rezolvare

1a) $|f(x)| \le x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

b) $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2a) $I_2 = \int_{-1}^{1}(1-2x^2+x^4)dx = \frac{1}{15}.$

b) $I_n - I_{n+1} = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^n\,dx = -x\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2(n+1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n+1}dx = \frac{1}{2(n+1)}I_{n+1}.$

c) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = I_n$, iar şirul $(I_n)_n$ tinde descrescător către 0.

Varianta 51 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $A-B=(-3\ ;\ 1] \Rightarrow (A-B)\cap\mathbb{Z}=\{-2\ ;-1\ ;\ 0\ ;\ 1\} \Rightarrow card\left((A-B)\cap\mathbb{Z}\right)=4$.

2. $2x+1=x^2-x+3 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x\in\{\ 1\ ;\ 2\ \} \Rightarrow (x\ ;\ y)\in\{(1\ ;\ 3),(2\ ;\ 5)\}$.

3. $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[1\ ;\ 2] \Rightarrow x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)}=1 \Rightarrow x\in\{1\ ;\ 2\}$.

4. $x!<7 \Rightarrow x\in\{0;1;2;3\}$, $y!<25 \Rightarrow y\in\{0;1;2;3;4\}$. Numărul soluțiilor : $4\cdot 5=20$.

5. $d(A;d)=\dfrac{|5\cdot 1+12\cdot 1-4|}{\sqrt{5^2+12^2}} \Rightarrow d(A;d)=1$.

6. $tga=\dfrac{1}{2}, tgb=\dfrac{1}{5} \Rightarrow tg(a+b)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\dfrac{7}{9}$.

Soluție

1.a) $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=A+I_2$

1.b) $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.Din $A\cdot X=X\cdot A$, rezultă $b=c, d=a-b$ deci $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$

Dacă $\det(X)=0 \Rightarrow a^2-ab-b^2=0$.Dacă $b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow X=0_2$,contradicție.Dacă $b\neq 0$,împărțind prin $b \Rightarrow t^2-t-1=0, t=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, fals.Deci $\det X\neq 0$, adică X este inversabilă.

1.c) $F_2=1$.Demonstrăm prin inducție.Verificare. $n=1; A=\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Presupunem adevărată pentru n și demonstrăm pentru $n+1$.

$A^{n+1}=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$

2.a)

$\sigma\cdot\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \pi\cdot\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Cum aceste permutări nu comută , rezultă concluzia.

2.b) Prin calcul direct se obține că ord(π)=3 .Deci $H=\{e,\pi,\pi^2\}$.

2.c) Fie π^i , $\pi^j\in H \Rightarrow \pi^{i+j}\in H$ .Cum H este finită ,rezultă H este subgrup al lui S_5.

Varianta 51 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-f\left(x\right)\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\dfrac{1}{e}$.

b) Funcția f este derivabilă și $f'(x)=\dfrac{\left(x^2+x-1\right)'x-\left(x^2+x-1\right)x'}{x^2}$, de unde $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$. Deoarece $f'(x)>0,\forall x\in[1,\infty)$, rezultă că func.ia f este strict crescătoare.

c) Funcția f fiind strict crescătoare re este injectivă. Cum f este continuă pe $[1,\infty)$, $f(1)=1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, din monotonia lui f este şi strict crescătoare, rezultă imaginea funcției f este $[1,\infty)$, deci f este surjectivă. Fiind injectivă şi surjectivă f este bijectivă.

c) Presupunem că şirul $(g(n))_{n\geq 1}$ este mărginit superior, deci există $\beta\in[1,\infty)$ astfel încât $g(n)\leq\beta,\forall n\geq 1$. Cum funcția g este surjectivă, există $\alpha\in[1,\infty)$ astfel încât $g(\alpha)=\beta$. Prin urmare $g(n)\leq g(\alpha),\forall n\geq 1$. Din $g(n)\leq g(\alpha)$, deoarece g este crescătoare rezultă $n\leq\alpha,\forall n\geq 1$, absurd.

2. a) Funcția F trebuie să fie continuă şi derivabilă. Din continuitatea în 1 rezultă $a+b=1$, iar din derivabilitatea în 1 rezultă $a=0$. Deci $a=0$ şi $b=1$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $\ln x=t$ .Rezultă $\int\limits_1^e\dfrac{1}{xF(x)}dx=\int\limits_1^e\dfrac{1}{x\left(1+\ln^2x\right)}dx=\int\limits_0^1\dfrac{1}{1+t^2}dt$.

Dar $\int\limits_0^1\dfrac{1}{1+t^2}dt=arctgt\,|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$, deci $\int\limits_1^e\dfrac{1}{xF(x)}dx=\dfrac{\pi}{4}$.

c) h este de două ori derivabilă, cu derivata de ordinul doi funcție continuă.
Utilizăm integrarea prin părți:
$\int\limits_1^{\pi}h(x)h''(x)\,dx=\int\limits_1^{\pi}h(x)\left(h'(x)\right)'dx=h(x)h'(x)\,|_1^{\pi}-\int\limits_1^{\pi}\left(h'(x)h'(x)\right)dx$. Deoarece $h(1)=h(\pi)=0$

rezultă $h(x)h'(x)\,|_1^{\pi}=0$. Deci $\int\limits_a^b h(x)h''(x)\,dx=-\int\limits_a^b\left(h'(x)\right)^2dx\leq 0$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $|4x-8|=4|x-2|, |4-2x|=2|x-2| \Rightarrow f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $x^2-2x+a-1=2x+3 \Rightarrow x^2-4x+a-4=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow a \in (-\infty, 8)$

3. $\sqrt[3]{x-1}=x-1 \Rightarrow x-1=(x-1)^3 \Rightarrow (x-1)(x^2-2x)=0 \Rightarrow x \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$.

4. $\left(\sqrt{3}+1\right)^9=\left(1+\sqrt{3}\right)^9$, $T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^k \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{k}{2} \in \mathbb{N}$

   Numărul termenilor iraționali este $10-\left(\left[\frac{9}{2}\right]+1\right)=5$.

5. $\frac{m+1}{m-1}=\frac{8}{-4} \Rightarrow m=\frac{1}{3}$.

6. $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} \Rightarrow \cos A=\frac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

Soluție

1.a) $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1.b) $m(\sigma)=7$ $m\left(\sigma^{-1}\right)=7$

1.c) $\varepsilon(\sigma)=-1$ Dacă ar exista o soluție x atunci $\varepsilon\left(x^4\right)=\varepsilon(\sigma)$ sau $1=-1$ contradicție

2.a) $x>1, y>1 \Rightarrow xy-x-y+2>1$, deoarece $(x-1)\cdot(y-1)>0$

2b) $f(xy)=xy-1; f(x)\circ f(y)=(x+1)\circ(y+1)=xy+1$

2.c) Fie $f^{-1}: G \to (0,\infty)$ care este izomorfism , $f^{-1}=g$ și deci

$\underbrace{x*x*...*x}_{10}=1025 \Rightarrow (g(x))^{10}=g(1025) \Leftrightarrow (g(x))^{10}=1024 \Leftrightarrow (x-1)^{10}=1024 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$

Varianta 52 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) *f* este continuă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, se obține prin operații cu funcții continue. Cum $\left|x\sin\frac{\pi}{x}\right| \le |x|$ și $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x} = 0$. Deci $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Prin urmare *f* este continuă și în 0. Rezultă că *f* este continuă pe $[0,1]$.

b) *f* este derivabilă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, se obține prin operații cu funcții derivabile.

Întrucât limita $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\searrow 0}\sin\frac{\pi}{x}$ nu există, f nu este derivabilă în 0.

c) $f'(x) = \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}, \forall x \in (0,1]$

Avem $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sin\left((n+1)\pi\right) = 0$ și $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sin n\pi = 0$.

Conform teoremei lui Rolle, există un punct $c \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ astfel încât $f'(c) = 0$, echivalent

$\sin\frac{\pi}{c} - \frac{\pi}{c}\cos\frac{\pi}{c} = 0 \Leftrightarrow c\sin\frac{\pi}{c} = \pi\cos\frac{\pi}{c}$

Rezultă $f(c) = \pi\cos\frac{\pi}{c}$. Prin urmare, c este o soluție a ecuației $f(x) = \pi\cos\frac{\pi}{x}$. și $c \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.

2.a) Avem $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$. Dar:

$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_0^1 x'\ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$. Cum

$\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = 1 - \ln 2$ rezultă $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx = 2\ln 2 - 1$.

b) $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x\,arctgx\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' arctgx\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$. Dar $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = 1 - arctgx\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Rezultă $\int_0^1 g(x)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

c) Considerăm funcția $\varphi = f - g$. Atunci: $\varphi'(x) = \frac{x}{1+x^2} - arctgx$ și $\varphi''(x) = -\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Deoarece $\varphi''(x) \le 0$, rezultă φ' este descrescătoare și $x \ge 0 \Rightarrow \varphi'(x) \le \varphi'(0) \Rightarrow \varphi'(x) \le 0$.

Prin urmare φ este descrescătoare și $x \ge 0 \Rightarrow \varphi(x) \le \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) \le 0 \Rightarrow f(x) \le g(x)$.

Ca atare aria căutată este $A = \int_0^1 \left(g(x) - f(x)\right)dx = -\frac{\pi}{4} - \ln 2 + \frac{3}{2}$.

Varianta 53 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\left[\sqrt{2008}\right]=44,\left\{-\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{3}\Rightarrow\left[\sqrt{2008}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}=46$.

2. $x_v=-\frac{b}{2a}=2\in[1\,;\,3], f(1)=f(3)=0, f(2)=-1\Rightarrow f([1\,;\,3])=[-1\,;\,0]$.

3. $\begin{cases}x+8\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[0\,;\,\infty), \sqrt{x+8}=2+\sqrt{x}\Rightarrow x+8=4+4\sqrt{x}+x\Rightarrow x=1$.

4. $D_{56}=\{1,2,4,7,8,14,28,56\}\Rightarrow p=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

5. $6\vec{i}+2\vec{j}=p(\vec{i}+\vec{j})+r(\vec{i}-\vec{j})\Rightarrow\begin{cases}p+r=6\\ p-r=2\end{cases}\Rightarrow(p;r)=(4;2)$.

6. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{5+7+8}{2}=10, S=10\sqrt{3}\Rightarrow R=\frac{abc}{4S}\Rightarrow R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Soluție

1.a) $A\cdot(X+Y)=A\cdot X+A\cdot Y=X\cdot A+Y\cdot A=(X+Y)\cdot A\Rightarrow X+Y\in C(A)$

1.b) Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Din $A\cdot E_1=E_1\cdot A, A\cdot E_2=E_2\cdot A\Rightarrow a=d, c=b=0\Rightarrow A=a\cdot I_2$

1.c) Dacă oricare trei se află în $C(A)$ atunci există $\alpha\in\mathbb{C}, A=\alpha\cdot I_2\Rightarrow$ a patra matrice se află în $C(A)$.

2.a) $x=a^{-1}\cdot b$, $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&5&3\end{pmatrix}$

2.b) $a\cdot b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&5&3\end{pmatrix}$; $ord(ab)=3$

2.c) $ord(b)=6\Rightarrow b^k=e$ echivalent cu $6\,|\,k$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Avem: $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$ și următorul tabel de variație al funcției *f*:

Din tabelul de variație rezultă că -1 și 1 sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

b) Deoarece f este continuă, $f(1)=-2$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ rezultă că ecuația are soluție în mulțimea $(1,\infty)$. Cum *f* este strict crescătoare pe $(1,\infty)$, rezultă că *f* este injectivă pe $(1,\infty)$. Deoarece *f* este injectivă, soluția este unică.

c) Deoarece $g(x)=f^2(x)=x^6-6x^4+9x^2$, rezultă $g'(x)=6x^5-24x^3+18x$, de unde $g''(x)=30x^4-24x^2+18$.

Pentru a rezolva ecuația $g''(x)=0$, notăm $x^2=t$ și rezultă $12\left(5t^2-6t+1\right)=0$ care are soluțiile $t_1=\frac{1}{5}$ și $t_2=1$. Deci ecuația are soluțiile $-1,-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},1$. Ținând cont de semnul funcției g'', rezultă că g are patru puncte de inflexiune.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	∞

2.a) $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=f(0$
continuă în 0. Rezultă *f* este conti
$\mathbb{R}$.
f continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite prim
$\mathbb{R}$.

b) $\int xe^x dx=e^x(x-1)+C$, iar $\int \sin x dx=-\cos x+C$.

Deci o primitivă a funcției f va fi de forma: $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1)+c_1, & x\le 0\\ -\cos x+c_2, & x>0\end{cases}$.

Din condiția de continuitate a lui *F* rezultă $c_1=c_2=c$.

c) Deoarece *F* este o primitivă a lui *f*, rezultă $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)-F(0)$, deci limita de calculat este

$\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x^2}$. Cu regula lui l´Hôspital : $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{F'(x)}{2x}$.

Apoi $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$; $4,5<\sqrt{21}<4,6 \Rightarrow 9<2\sqrt{21}<9,2$,deci $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\right]=19$.

2. $1-x\neq 0, 1-2x\neq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$; $\frac{2x-1}{1-x}-\frac{3x+2}{1-2x}\geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-3x+3}{(x-1)(2x-1)}\leq 0 \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

3. $\sqrt[3]{2-x}=2-x \Rightarrow 2-x=(2-x)^3 \Rightarrow (2-x)\left(x^2-4x+3\right)=0 \Rightarrow x\in\{1;2;3\}$.

4. $T_{k+1}=C_{49}^k\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{49-k} y^{\frac{k}{2}}$; $\frac{2(49-k)}{3}=\frac{k}{2} \Rightarrow k=28 \Rightarrow T_{29}$.

5. $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{r_G}=2\vec{i}+2\vec{j}$.

6. $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow R=\sqrt{3}.$

Soluție

1.a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; $A\cdot B\neq B\cdot A$

1b) Prin calcul direct .

1.c) Notăm $C=A\cdot B$. $C^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ apoi prin inducție completă se arată că $C^n=\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ deci răspunsul este negativ.

2a) $X^3-2\cdot X-1=(X+1)\cdot P$

2.b) $Q_3=X^3-2\cdot X-1$ $Q_3=X^3-2\cdot X-1$ are trei rădăcini reale : $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

2.c) Prin inducție completă după n .Pentru $n=2$, $Q_2=P\,\vdots\,P$. Presupunem afirmația adevărată pentru n și o demonsrăm pentru $n+1$. $Q_{n+1}=X^{n+1}-F_{n+1}\cdot X-F_n=X\cdot\left(X^n-F_n\cdot X-F_{n-1}\right)+F_n\cdot\left(X^2-X-1\right)$, de unde rezultă afirmația .

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Deoarece se obține prin operații cu funcții continue pe $\mathbb{R}$, f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci și pe $[-1,1]$.

f este derivabilă pe $(-\infty,0)$ și $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{(x^2+4)^2}$, deci f este derivabilă în -1 și

$f'(-1)=-\dfrac{3}{25}<0$. Analog, f este derivabilă pe $(0,\infty)$, deci f este derivabilă în 1 și $f'(1)=\dfrac{3}{25}>0$.

Rezultă că $f\in A$.

b) $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{-x}{x(x^2+4)}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow f$ derivabilă la stânga în 0 și $f_s'(0)=-\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x}{x(x^2+4)}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow f$ derivabilă la dreapta în 0 și $f_d'(0)=\dfrac{1}{4}$. Deoarece

$f_d'(0)\neq f_s'(0)$ rezultă că f nu este derivabilă în 0.

c) Funcția g, fiind continuă pe $[-1,1]$, este mărginită și își atinge marginile.

Deoarece $g'(-1)<0$ există $\alpha\in(-1,1)$ așa încât $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}<0, \forall x\in(-1,\alpha)$. Aceasta implică $g(x)<g(-1), \forall x\in(-1,\alpha)$. De aici deducem că minimul funcției continue g nu poate fi atins în –1. Analog, minimul funcției continue g nu poate fi atins în 1. Deci minimul funcției g este atins într-un punct $x_0\in(-1,1)$.

2. a) $F'(x)=\left(ax^2+(2a+b)x+b+c\right)e^x$.

Deoarece F este o primitivă a lui f, rezultă $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare rezultă $a=1, b=-3, c=3$.

b) Aria cerută este egală cu $\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 |x(x-1)|e^x dx=-\int_0^1 x(x-1)e^x dx$. Dar

$\int_0^1 x(x-1)e^x dx=(x^2-3x+3)e^x\Big|_0^1=e-3$. Deci aria cerută este egală cu $3-e$.

c) $Vol(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 x^2(1-x)^2e^{2x}dx=\pi\int_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)e^{2x}dx$.

Fie $G(x)=\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+p\right)e^{2x}$ o primitivă a lui $g(x)=\left(x^4-2x^3+x^2\right)e^{2x}$. Din $G'(x)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă $a=\dfrac{1}{2}, b=-2, c=\dfrac{7}{2}, d=-\dfrac{7}{2}, p=\dfrac{7}{4}$.

Prin urmare $\int_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)e^{2x}dx=\left(\dfrac{1}{2}x^4-2x^3+\dfrac{7}{2}x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{7}{4}\right)e^{2x}\Big|_0^1=\dfrac{15e^2-7}{4}$, deci

$Vol(C_g)=\dfrac{\pi}{4}(15e^2-7)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\left[-\sqrt{8}\right]=-3,\left\{-2,8\right\}=0,2\Rightarrow -3,2$.

2. $\begin{cases} s=5 \\ s^2-2p=13 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} s=5 \\ p=6 \end{cases}\Rightarrow (x,y)\in\left\{(2,3),(3,2)\right\}$.

3. $2^x=t,t^2-10t+16=0\Rightarrow t\in\{2;8\}\Rightarrow x\in\{1;3\}$.

4. $C_x^2=\dfrac{x(x-1)}{2},A_x^2=x(x-1),x\geq 2,\ \dfrac{x(x-1)}{2}+x(x-1)=30\Rightarrow x=5$.

5. $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j},\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right),\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2}}$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{-3}{5}$.

6. ctg x=3$\Rightarrow$ tg $x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ tg $2x=\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{3}{4}$.

Soluție

1.a) $x_{n+1}=a\cdot x_n-b\cdot y_n$, $y_{n+1}=b\cdot x_n+a\cdot y_n$. Deci $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(x_n^2+y_n^2\right)$

1.b) Șirurile $(x_n)_n,(y_n)_n$ $(x_n)_n,(y_n)_n$ sunt mărginite dacă și numai dacă șirul $(d_n)_n$, $d_n=x_n^2+y_n^2,\forall n\in\mathbb{N}$ este mărginit.

$d_{n+1}=\left(a^2+b^2\right)\cdot d_n$ deci $d_n=\left(a^2+b^2\right)^n\cdot\left(x_0^2+y_0^2\right)$. Dacă $a^2+b^2\leq 1$ atunci $d_n\leq x_0^2+y_0^2,\forall n\in\mathbb{N}$

Dacă $a^2+b^2>1$ șirul (d_n) este nemărginit.

1.c) $A=2\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\cdot\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\Rightarrow x_n=2^n\cdot\left(x_0\cdot\cos\frac{n\pi}{3}-y_0\cdot\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

De aici rezultă relația cerută.

2.a) $A\neq I_3,A^2\neq I_3,A^3\neq I_3,A^4=I_3;A^{4n}=I_3,\forall n\in\mathbb{N}$. $A^{4n+1}=A,A^{4n+2}=A^2,A^{4n+3}=A^3$.
De unde rezultă concluzia.

2.b) $G=\left\{I_3,A,A^2,A^3\right\}$ formează un grup .Se arată că $A^i\cdot A^j\in G,i,j\in\{0,1,2,3\}$
sau se scrie tabla operației.

2.c) $\left(I_3+A+A^2+A^3\right)+\left(I_3+A+A^2+A^3\right)+...+\left(I_3+A+A^2+A^3\right)+I_3=$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2009 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M)=2009$

Varianta 55 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Succesiv rezultă:

$$\lim_{x\nearrow 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1};\ \lim_{x\nearrow 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}};$$

$$\lim_{x\nearrow 1}\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\nearrow 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\nearrow 1}\frac{3x^2-3}{3(x-1)^2}}==\sqrt[3]{\lim_{x\nearrow 1}\frac{x+1}{x-1}}=-\infty.$$

b) Funcția *f* este derivabilă în orice punct *x* care satisface condiția $x^3-3x+2\neq 0$. Deci domeniul de derivabilitate al funcției *f* este $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

c) Aplicând corect reguli de derivare, rezultă $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$.

Tabelul de variație al funcției *f* este:

x	$-\infty$		-2		-1		1		∞
$f'(x)$		+++++	|	+++++	0	- - - - - -	|	++++++	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Din tabelul de variație al funcției rezultă că –1 şi 1 sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

2. a) Descompunem în fracții simple : $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$.

Rezultă $1=A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)$ sau $(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A=1$.

Astfel avem sistemul $A+B+C=0,3A+2B+C=0,2A=1$ care are soluția $A=\dfrac{1}{2},B=-1,C=\dfrac{1}{2}$.

Atunci: $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+2)}$. Primitiva se găseşte imediat:

$$\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=\ln\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1}+C.$$

b) Deoarece $t\in(1,\infty)$ rezultă $t>1,t+1>2,t+2>3\Rightarrow t(t+1)(t+2)>6\Rightarrow\dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}<\dfrac{1}{6}$.

Atunci, pentru $x>1$ rezultă $\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt<\int_1^x\frac{1}{6}dt=\frac{x-1}{6}$.

Egalitatea are loc dacă $x=1$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă: $x^3=t$. Rezultă $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dx$.

Dar $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dx=arctgt\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$. Rezultă $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx=\frac{\pi}{12}$.

Varianta 56 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie

1. $2(a-bi)+a+bi=3+4i \Rightarrow z=1-4i$.

2. $s\left(s^2-3p\right)=-18$.

3. $5^x=t>0 \Rightarrow 1+t-2t^2=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=0$.

4. $T_{k+1}=C_9^k\left(a^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^k, 2(9-k)-\frac{k}{3}=4 \Rightarrow k=6 \Rightarrow T_7$.

5. $\vec{u}^2-\vec{v}^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right), \left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)=3\cdot 2+2\cdot 3=12$.

6. $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=13 \Rightarrow R=\frac{BC}{2}=\frac{13}{2}$.

Soluţie

1.a) $f(A)=A^2=I_2$

1.b) $f\left(X+f(X)\right)=A\cdot\left(X+A\cdot X\right)=A\cdot X+A^2\cdot X=A\cdot X+X=X+f(X)$

1.c) Fie $f(X_1)=f(X_2) \Rightarrow A\cdot X_1=A\cdot X_2 \Rightarrow X_1=X_2$, deoarece A este inversabilă , deci f este injectivă.
Fie $Y\in M_2(\mathbb{R})$. $X=A^{-1}\cdot Y$ este o preimagine a lui Y .Rezultă f este surjectivă, deci f este bijectivă

2.a)
$X,Y\in M \Rightarrow A\cdot X=X\cdot A, A\cdot Y=Y\cdot A \Rightarrow A\cdot(X\cdot Y)=(A\cdot X)\cdot Y=(X\cdot A)\cdot Y=$
$X\cdot(A\cdot Y)=$
$X\cdot(Y\cdot A)=(X\cdot Y)\cdot A$

2.b) Fie $X,Y\in G \Rightarrow \det(X)\neq 0, \det(Y)\neq 0, \det(X\cdot Y)\neq 0$ şi $X\cdot Y\in M \Rightarrow X\cdot Y\in G$.

$X\in M$ şi $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.Cum $\det(X)\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$.

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\in G$$

2.c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, X^2=I_2 \Rightarrow c=0, a=\pm 1$. Deci există un element de ordin doi : $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{2}{3}$, rezultă că dreapta de ecuație $y=\dfrac{2}{3}$ este asimptotă orizontală spre ∞.

b) Observăm că $a_n > 0$, $\forall$ n ≥ 1. Deoarece $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{5+2n}{4+3n}\le 1$, $\forall$ n ≥ 1, rezultă că şirul este descrescător.

Din $0 < a_n \le a_1$ şi $a_1=\dfrac{5}{4}$ rezultă $0<a_n\le\dfrac{5}{4}$, $\forall$ n ≥ 1, deci şirul este şi mărginit.

Fiind descrescător şi mărginit, şirul este convergent , deci are limită.

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x\in\mathbb{R}$. Din $a_{n+1}=\dfrac{5+2n}{4+3n}\cdot a_n$ rezultă $x=\dfrac{2}{3}x$, de unde x = 0. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

c) Din $g(x)=f(e^x)$ rezultă $g'(x)=-\dfrac{7}{(3e^x+4)^2},\forall x\in\mathbb{R}$ .Atunci $g''(x)=\dfrac{42e^x}{(3e^x+4)^3},\forall x\in\mathbb{R}$.

Deoarece $g''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$, prin urmare nu are puncte de inflexiune.

2 a) $\int_0^1 f(e^x)dx=\int_0^1\sqrt{x}dx=3\sqrt{x^3}\Big|_0^1=3$.

b) $Vol(C_f)=\pi\int\limits_1^e \ln x dx$. Dar $\int\limits_1^e \ln x dx = x\ln x - x\Big|_1^e$ **.** Rezultă $Vol(C_f)=\pi\int\limits_1^e \ln x dx=\pi$ **.**

c) Pentru calculul integralei $\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_1^e\sqrt{\ln x}dx$ utilizăm schimbarea de variabilă

$\sqrt{\ln x}=t\Rightarrow \ln x=t^2\Rightarrow x=e^{t^2}\Rightarrow dx=2te^{t^2}dt$. Apoi $x=1\Rightarrow t=0$ şi $x=e\Rightarrow t=1$ .Deci

$$\int\limits_1^e\sqrt{\ln x}dx=\int\limits_0^1 2t^2e^{t^2}dt=\int\limits_0^1\left(e^{t^2}\right)' tdt=te^{t^2}\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^{t^2}dt=e-\int\limits_0^1 e^{t^2}dt=e-\int\limits_0^1 e^{x^2}dx.$$

Prin urmare $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx+\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_0^1 e^{x^2}dx+e-\int\limits_0^1 e^{x^2}dx=e$

Varianta 57 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\frac{10}{a}+10a=10\frac{1+a^2}{a}$, $a=\frac{7}{11}\Rightarrow 10\frac{1+a^2}{a}=\frac{1700}{77}\Rightarrow\left[\frac{10}{a}+10a\right]=22$.

2. $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1\forall x\in\mathbb{R}, x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq 1\forall x\in\mathbb{R}$
$(x^2+4x+5)(x^2+2x+2)\geq 1\forall x\in\mathbb{R}$.

3. $x>0, \log_2(4x)=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x$, $\log_2 x=t$, $t^2+t-2=0\Rightarrow t\in\{1\ ;\ \text{-}2\}$
$x\in\left\{2\ ;\ \frac{1}{4}\right\}$.

4. $T_{k+1}=C_{200}^{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{200-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k, k\in\{0;1;2;...;200\}, \frac{200-k}{3}-\frac{k}{2}=0\Rightarrow k=80\Rightarrow T_{81}$.

5. $m=-\frac{4}{-8}=\frac{1}{2}\Rightarrow\ y-1=\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow\ x-2y=0$.

6. $m_a^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}, a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow a^2=12, m_a=\sqrt{7}$.

Soluție:

1.a) $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=3, y_1=2$; $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\Rightarrow x_2=17, y_2=12.$

1.b) $\begin{matrix}x_{n+2}=3\cdot x_{n+1}+4\cdot y_{n+1}\\y_{n+2}=2\cdot x_{n+1}+3\cdot y_{n+1}\end{matrix}$; Deci $x_{n+2}-6\cdot x_{n+1}+x_n=0,\forall n\geq 0$.

1.c) Demonstrăm prin inducție. $x_0+y_0\cdot\sqrt{2}=1, x_1+y_1\cdot\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$ .Presupunem adevărat pentru n și demonstrăm pentru $n+1$.

$x_{n+1}+y_{n+1}\cdot\sqrt{2}=3\cdot x_n+4\cdot y_n+(2x_n+3y_n)\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})\cdot(x_n+y_n\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^{n+1}$.

2.a) $\hat{3}x^2=\hat{3}\Rightarrow x^2=\hat{1}\Rightarrow x\in\left\{\hat{1},\hat{6}\right\}$

2.b) $ord\left(\hat{3}\right)=6$

2.c) Presupunem că f este un morfism de grupuri. $f\left(\bar{0}\right)=\hat{1}; f\left(\bar{0}\right)=f\left(\bar{2}+\bar{2}+\bar{2}\right)=\left(\hat{3}\right)^3=\hat{6}=\hat{1}$,

contradicție.

Varianta 57 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Din $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ rezultă $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 > 0, \forall n \geq 1$, $\forall$ n $\geq$ 1, deci şirul este strict crescător. Cum $x_n \geq x_1$, şirul este mărginit inferior. Demonstrăm că şirul este nemărginit superior. Într-adevăr, presupunând că este mărginit superior, conform teoremei lui Weierstrass rezultă că este convergent, deci are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Trecând la limită în relația de recurență şi, ținând cont de teorema referitoare la operații cu şiruri care au limită, rezultă $x = x^2 + 1$, de unde $x^2 + x + 1 = 0$, deci $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, contradicție cu $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare şirul dat este strict crescător şi nemărginit superior, deci are limită şi aceasta este ∞.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \leq 0 \\ arctgx, & x > 0 \end{cases}$.

Funcția f este derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$ şi $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}$. Apoi:

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x^2 + 1) = 1;$$

$$f_d'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{arctgx - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{arctgx - arctg0}{x - 0} = arctg\,'0 = 1.$$

Deoarece $f_s'(0) = f_d'(0) = 0$ rezultă f derivabilă şi în 0 şi $f'(0) = 0$. Prin urmare, f este derivabilă şi

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}.$$

c) Fie $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $h(x) = f(x) - a + 2\ln x$. Atunci $h'(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$.

Pentru $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Se obține că 1 este punct de minim, deci $h(x) \geq h(1) = 2 - a, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Prin urmare , $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ dacă şi numai dacă $a \leq 2$. Deci cel mai mare număr real a cu proprietatea certă este 2.

2.a) $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx$. Se utilizează schimbarea de variabilă $x^2 = t$. Se obține:

$$\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{-t}\right)' dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right).$$

b) Suntem în cazul $\dfrac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l´Hôspital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin xF'(\cos x)}{2x}; \text{ apoi:}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin xF'(\cos x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{2x} \cdot f(\cos x)\right) = -\frac{1}{2}f(1) = -\frac{1}{2}e^{-1}.$$

c) $g'(x) = F'(x) + f'(x) = f(x) - 2xe^{-x^2} = (1 - 2x)e^{-x^2}$

Tabelul de variație al funcției g este:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

Varianta 58 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\frac{1+4i}{4+7i}+\frac{1-4i}{4-7i}=\frac{64}{65}$

2. $x_v=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x=1$.

3. $3^x=t, t>0$, $3t+\frac{3}{t}=10\Rightarrow t\in\left\{\frac{1}{3};3\right\}\Rightarrow x\in\{-1;1\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este $2008:2=1004$. Numărul cazurilor favorabile se obține din $3\cdot 1, 3\cdot 3, ..., 3\cdot 669\Rightarrow 670:2=335$. $p=\frac{335}{1004}$.

5. $m_d=-2\Rightarrow m=-\frac{1}{-2}$, $y-2=\frac{1}{2}(x-3)\Rightarrow x-2y+1=0$.

6. M mijlocul lui $[BC]$. $GM=\frac{1}{3}AM$, AM este înălțime $AM^2=AB^2-BM^2\Rightarrow AM=4$.
Deci $GM=\frac{4}{3}$.

Soluție

1.a) $d=\frac{bc}{a}\Rightarrow f(x)=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}$

1.b) Fie $x_1,x_2>0$ a.î. $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1(ad-bc)=x_2(ad-bc)$, deci $x_1=x_2$, adică f este injectivă.

1.c) Inducție după n. Pentru $n=1\Rightarrow f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$. Presupunem adevărată pentru n și demonstrăm pentru $n+1$. $\underbrace{f\circ f\circ...\circ f}_{n+1}(x)=\frac{a_nf(x)+b_n}{c_nf(x)+d_n}=$

$\frac{a_{n+1}x+b_{n+1}}{c_{n+1}x+d_{n+1}}$, deoarece $A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\cdot A$.

2a) Fie $X\in G, X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1&b\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det X=a+1\neq 0$.

2.b) $A^2=A, B^2=0_2, A\cdot B=B, B\cdot A=0_2$.
Fie $X_1,X_2\in G; X_1=I_2+aA+bB, X_2=I_2+a'A+b'B$
$X_1\cdot X_2=I_2+(a+a'+aa')A+(b+b'+bb')B$, $a+a'+aa'\neq -1$.
$(X_1)^{-1}=I_2-\frac{a}{a+1}A-\frac{b}{b+1}B$, deci G este un grup.

2.c) $X^2=I_2\Rightarrow X=I_2-2A+bB, b\in\mathbb{R}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$, rezultă

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0\cdot\frac{\pi}{2} = 0$.

b) *f* este derivabilă și $f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Semnul derivatei:

x		-1		1	
$f'(x)$	- - - - - - - -	0	+++++++++	0	- - - - - - - - - - -

Ținând cont de semnul derivatei, rezultă că – 1 este punct de minim local, iar 1 este punct de maxim local.

c) Considerăm funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x) = f(x) - g(x)$. Rezultă $h'(x) = -\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. Deoarece

$h'(x) < 0, \forall x\in(0,\infty)$, rezultă că h este descrescătoare pe $(0,\infty)$. Deci

$h(x) < h(0), \forall x\in(0,\infty) \Rightarrow h(x) < 0, \forall x\in(0,\infty) \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < arctgx, \forall x\in(0,\infty)$

2.a) Funcția *f* este continuă pe $[0,1]$, deci este integrabilă pe acest interval.

Funcția $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x) = x\ln x$ este continuă, deci este integrabilă pe $[1,2]$.

Deoarece $f(x) = g(x), \forall x\in[1,2]\setminus\{1\}$, rezultă că *f* este integrabilă pe $[1,2]$.

Fiind integrabilă pe $[0,1]$ și pe $[1,2]$, rezultă f integrabilă pe $[0,2]$.

b) Fie *F* o primitivă a funcției $\varphi:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi(t) = t\ln t$. Atunci: $\int_1^x t\ln t\,dt = F(x) - F(1)$.

Rezultă $\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1} = \lim\limits_{x\searrow 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = F_d'(1)$. Deoarece $F_d'(1) = \varphi(1) = 0$ rezultă că limita este egală cu 0.

c) În cazul respectiv, deoarece *f* este continuă, ea admite o primitivă *F* și $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Fie $t\in(0,2)$. Considerăm funcția. $\theta:[0,2]\to\mathbb{R}, \theta(x) = F(x) - f(t)x$

Funcția $\theta:[0,2]\to\mathbb{R}, \theta(x) = F(x) - f(t)x$ este derivabilă și $\theta'(x) = F'(x) - f(t) = f(x) - f(t)$.

Deoarece f este strict crescătoare, rezultă că θ' este strict negativă la stânga lui *t*, respectiv strict pozitivă la dreapta lui *t*. Aceasta probează că funcția θ este strict descrescătoare la stânga lui *t*, respectiv strict crescătoare la dreapta lui *t*. Prin urmare θ nu este injectivă, deci există $a,b\in[0,1], a\neq b$, astfel încât $\theta(a) = \theta(b)$, cea ce implică $F(a) - f(t)a = F(b) - f(t)b \Rightarrow F(a) - F(b) = (a-b)f(t)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. Numărul termenilor este egal cu 11, rația egală cu 3. $1+4+7+...+31=\frac{(31+1)\cdot 11}{2}\Rightarrow 176$.

2. $x<3\Rightarrow -x+3-x+4=1\Rightarrow x\in\varnothing$, $x\in[3,4)\Rightarrow x-3-x+4=1\Rightarrow x\in[3,4)$,
$x>4\Rightarrow x-3+x-4=1\Rightarrow x=4$. Deci $x\in[3,4]$.

3. $\log_3 x=t$, $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Rightarrow t\in\left\{2;\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow x\in\left\{9;\sqrt{3}\right\}$

4. Numărul cazurilor posibile $2008:2=1004$. Numărul cazurilor favorabile 251. $p=\frac{1}{4}$.

5. $\sqrt{(m-2)^2+(-2-m)^2}=4$. $m\in\{-2;2\}$.

6. $\operatorname{ctg} x=6\Rightarrow\frac{\cos x}{\sin x}=6\Rightarrow\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=36\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1}{37}$.

Soluție

1.a) $\Delta=14m-4\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{7}\right\}$

1.b) $m=\frac{2}{7}$

1.c) $d_2\cap d_3=\{(7,-3)\};(7,-3)\in d_1\Rightarrow m=\frac{2}{7}$

2.a) $\det A=m\in\left\{\pm\hat{1}\right\}$. Cum $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ este un corp comutativ , rezultă că A este inversabilă.
Se arată că : $ABA=B$

2.b) $|H|=10$. Fie $X_1,X_2\in H\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix} m & n\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} m' & n'\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

$X_1\cdot X_2=\begin{pmatrix} mm' & mn'+n\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in H$, deoarece $mm'\in\left\{\pm\hat{1}\right\}$.

2.c) $X_1^2=I_2, X_1\neq I_2\Rightarrow\begin{pmatrix} m^2 & mn+n\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\Rightarrow m^2=\hat{1}$ și $n\left(m+\hat{1}\right)=\hat{0}$.Pentru $m=\hat{1}, n=\hat{0}\Rightarrow X_1=I_2$,
fals. Pentru $m=-\hat{1}, n\in\mathbb{Z}_5\Rightarrow 5$ soluții.

Varianta 59 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Deoarece $\dfrac{f(x)}{f(x+1)} = \dfrac{x^3+x}{(x+1)^3+x+1}$ şi $\dfrac{x^3+x}{(x+1)^3+x+1} = \dfrac{x^3+x}{x^3+3x^2+4x+2}$ rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{f(x+1)} = 1.$

b) Deoarece $f'(x) = 3x^2+1>0$, rezultă că f este strict crescătoare , deci este injectivă.

Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, iar f este strict crescătoare şi continuă rezultă $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă. Fiind injectivă şi surjectivă f este bijectivă, deci este inversabilă.

c) Notăm $f^{-1} = g$ şi $g(x) = y$. Rezultă $x = g^{-1}(y) \Leftrightarrow x = f(y)$. Atunci $x\to\infty \Leftrightarrow y\to\infty$ Prin urmare:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{y\to\infty}\frac{y}{\sqrt[3]{f(y)}} = \lim_{y\to\infty}\frac{y}{\sqrt[3]{y^3+y}} = 1.$$

2.a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$. Utilizând schimbarea de variabilă $x = -t$,

rezultă $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{\pi} f(-t)dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)dt = -\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ şi astfel se obține că $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$.

b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{f(x)}{\sin x}dx = \int_1^3 x^2dx$. Dar $\displaystyle\int_1^3 x^2dx = 2c^2 \Leftrightarrow \frac{26}{3} = 2c^2$. Rezultă $c = \sqrt{\dfrac{13}{3}} \in (1,3)$.

c) $F(x) = \left(-x^2+2\right)\cos x + 2x\sin x$. Considerăm şirul $(x_n')_{n\ge1}$, $x_n' = 2n\pi$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n') = -\infty$.

Considerând şirul $(x_n'')_{n\ge1}$, $x_n'' = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n'') = \infty$. Prin urmare funcția F nu are limită la ∞.

Varianta 60 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $1+3+3^2+...+3^8=\dfrac{3^9-1}{3-1}=\dfrac{3^9-1}{2}\Rightarrow 2\dfrac{3^9-1}{2}=3^9-1<3^9.$

2. $x_1^3+x_2^3=s\left(s^2-3p\right)$, $s=-5, p=-7\Rightarrow x_1^3+x_2^3=-5\left(25-3(-7)\right)=-230\in\mathbb{Z}$.

3. $\log_5 x=t$, $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow t\in\left\{2;\dfrac{1}{2}\right\}\Rightarrow x\in\left\{25;\sqrt{5}\right\}$.

4. $2x-3\geq 2$, $\dfrac{(2x-3)(2x-4)}{2}=6\Rightarrow x=3$.

   $C_3^2=3$ .Deci $x=3$.

5. $\dfrac{y+2}{3+2}=\dfrac{x+3}{2+3}\Rightarrow x-y+1=0$.

6. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right)\Rightarrow\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right)=\dfrac{5}{6}$.

Soluție

1.a) $f(A)=A^2=0_2$

1.b) $f\left(f(X)\right)=f(AX)=A^2X=0_2$

1.c) Presupunem $f(X)+f(Y)=I_2\Rightarrow A(X+Y)=I_2$ și aplicăm pe $f\Rightarrow f\left(A(X+Y)\right)=f(I_2)\Rightarrow A^2(X+Y)=A\Rightarrow 0_2=A$, contradicție.

2a) $A^t=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow AA^t=I_2$,deci $A\in P$

2.b) Fie $A,B\in P, A\cdot A^t=I_2\Rightarrow det\left(A\cdot A^t\right)=1\Rightarrow\det(A)\cdot\det\left(A^t\right)=1\Rightarrow\det(A)\neq 0$

$\Rightarrow A$ inversabilă $\Rightarrow A^t=A^{-1}\Rightarrow P=GL_2(\mathbb{R})=grup$

2.c) $X=A^{-1}\cdot B;\det(X)=\left(\det A^{-1}\right)\cdot\left(\det B\right)\neq 0\Rightarrow X\in GL_2(\mathbb{R})=P$.

Varianta 60 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie

1.a) Deoarece $f'(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă următorul tabel de variaţie:

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$

. Se observă că cea mai mică valoare este $\ln 2$.

b) Cum $e^{f(x)}=1+\sqrt{1+x^2}$ şi $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă $\left(e^{f(x)}-1\right)g'(x)=1$.

c) Fie funcţia $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=g(x)-x$. Rezultă $\varphi'(x)=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1$. Deoarece $\varphi'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă φ strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, pentru orice $x>0$ rezultă $\varphi(x)<\varphi(0)$. Cum $\varphi(0)=0$, se obţine inegalitatea cerută.

2.a) Într-adevăr f este derivabilă şi $f(0)=f(1)=0$, iar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\left.\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{x}{2}\right|_0^1=0$.

b) Deoarece $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$, rezultă $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d$ şi $f(0)=d, f(1)=a+b+c+d$. Prin urmare, condiţia $f\in M$ este echivalentă cu $\begin{cases}a+b+c=0\\ \dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{2}=0\end{cases}$, de unde: $a\in\mathbb{R}, a\neq 0, b=-\dfrac{3a}{2}, c=\dfrac{a}{2}, d\in\mathbb{R}$. Rezultă

$f(x)=ax^3-\dfrac{3a}{2}x^2+\dfrac{a}{2}x+d, a\in\mathbb{R}, a\neq 0, d\in\mathbb{R}$. Atunci $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=d=f(0)$.

c) Aplicăm teorema de medie. Deci $c\in(0,1)$ astfel încât $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=f(c)$. Rezultă $f(c)=f(0)$ şi $f(c)=f(1)$.

Conform teoremei lui Rolle, există $\alpha\in(0,c)$ şi $\beta\in(c,1)$ astfel încât $f'(\alpha)=0, f'(\beta)=0$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $2(1-x)=x+1+4\Rightarrow x=-1$

2. $f(0)=6$, $f(x)=0\Rightarrow x\in\{1;-6\}\Rightarrow A(0;-6),B(1;0),C(-6;0)$

3. $\sin x=-\frac{1}{2}, x\in\left\{(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}, x\in\left\{\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este 2^6. Numărul cazurilor favorabile este $C_6^2=15$. $p=\frac{15}{64}$.

5. $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}\Rightarrow\overrightarrow{r_C}=6\vec{i}+6\vec{j}$.

6. $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{v}-\vec{u}\right)=4\vec{u}\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2-\vec{u}\vec{v}=3\vec{u}\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2$,

$3\vec{u}\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=3\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot1+2\cdot2^2$, $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{v}-\vec{u}\right)=9$.

Soluție

1.a) $M_{a,b}\cdot M_{c,d}=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&c&d\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a+c&b+d\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=M_{a+c,b+d}$

1.b) $M_{0,0}=I_3$ este elementul neutru .Pentru orice matrice $M_{a,b}\in G$, există matricea $M_{-a,-b}\in G$ a.î. $M_{a,b}\cdot M_{-a,-b}=M_{0,0}=M_{-a,-b}\cdot M_{a,b}$. . $M_{c,d}\cdot M_{a,b}=M_{c+a,d+b}=M_{a+c,b+d}=M_{a,b}\cdot M_{c,d}$.

1.c) $M_{a,b}-M_{a,b}^t=M=\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&0\\-b&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M)=0$;

Dacă $a=0,b\in\mathbb{R}^*\Rightarrow rang(M)=1$; Dacă $a=0,b=0\Rightarrow rang(M)=0$.

Dacă $a\in\mathbb{R}^*\Rightarrow rang(M)=2$.

2a) $ord(e)=1$, $ord(a)=ord(b)=ord(c)=2$ .Deci $x=e$ este unica soluție.

2.b) $\forall x\in K, x^2=e\Rightarrow K$ este comutativ

Dacă $ab=a\Rightarrow b=e$,fals.

Dacă $ab=b\Rightarrow a=e$,fals.

Dacă $ab=e\Rightarrow b=a^{-1}=a$,fals.Deci $ab=c$

2.c) Nu sunt izomorfe deoarece K nu este ciclic și $\mathbb{Z}_4$ este ciclic fiind generat de $\hat{1}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) *f* este continuă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,1)$ și $(1,\infty)$, deoarece pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,1)$ și $(1,\infty)$ *f* se obține prin operații cu funcții continue. *f* este continuă în 1 dacă $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1=f(1)$ rezultă f continuă în 1. Rezultă *f* continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Suntem în cazul $\dfrac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l´ Hôspital. Rezultă $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{2x(x-1)}$.

Dar $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{2x(x-1)}=-\dfrac{1}{2}$. Deci limita este $-\dfrac{1}{2}$.

c) Deoarece se obține prin operații cu funcții derivabile, funcția f este derivabilă pe $(0,\infty)\setminus\{1\}$.

În plus, $f'(x)=\dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2},\forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$.

Cum $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$, rezultă că f este derivabilă în $x=1$ și

$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}f'(x)=-\dfrac{1}{2}$.

Prin urmare, $f':(0,\infty)\to\mathbb{R}$ și $f'(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{x}-\ln x\right)\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}, & x\neq1\\ -\dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$.

Deoarece $1-\dfrac{1}{x}-\ln x\le0,\forall x\in(0,\infty)$ rezultă $f'(x)<0,\forall x\in(0,\infty)$, deci funcția f este strict descrescătoare.

2.a) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui *f*. Atunci *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Deci $F'(x)=\ln(1+\sin^2 x),\forall x\in\mathbb{R}$. Deoarece $1+\sin^2 x\ge1$ rezultă $F'(x)=\ln(1+\sin^2 x)\ge0,\forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare *F* este crescătoare pe $\mathbb{R}$

b) $\int_0^{\pi} f(x)\cos dx=\int_0^{\pi}\ln\left(1+\sin^2 x\right)\cos x\,dx$.

Utilizăm schimbarea de variabilă $\sin x=t$ .Rezultă $\int_0^{\pi} f(x)\cos dx=\int_0^{0}\ln\left(1+t^2\right)dt=0$.

c) Funcția f, fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie F o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui f.
Atunci F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

În plus, $g(x)=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)dt=F(\arcsin x)-F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, de unde rezultă că g este derivabilă pe $(-1,1)$

$g'(x)=\arcsin' x\cdot F'(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2\right)$. Deci

$g':(-1,1)\to\mathbb{R}$ și $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2\right)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $6^2 = x(x-5) \Rightarrow x = 9$.

2. $f(-1) = -2 \Rightarrow f(2\cdot(-2)) = 10 \Rightarrow f(2\cdot(f(-1))) = 10$.

3. $2x + \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pi; 2x + \frac{\pi}{2} = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi\right\}$. Deci $x \in \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; 2\pi\right\}$.

4. Cazul 1: $4k = 20 \Rightarrow k = 5$
Cazul 2: $4k + 20 = 48 \Rightarrow k = 7$
$k \in \{5, 7\}$

5. $2x_M = x_A + x_N, 2x_N = x_B + x_M \Rightarrow x_M = 4, x_N = 5;$
$2y_M = y_A + y_N, 2y_N = y_B + y_M \Rightarrow y_M = 3, y_N = 4$, deci $M(4\ ;\ 3)$, $N(5\ ;\ 4)$.

6. $-1 < \frac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(a+1)} < 0, a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a \in \{1, 2\}$. Doar pentru $a = 2$ se obține triunghi .

Soluție

1.a) $B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = 2B$

1.b) $A^2 = 2A \Rightarrow a^2 = bc = 2a; b(a+d) = 2b;\ c(a+d) = 2c; bc + d^2 = 2d$ Dacă $b \neq 0 \Rightarrow a + d = 2,$ contradicție.Deci $b = 0. Ana\log\ c = 0$. $a^2 = 2a, d^2 = 2d \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A$

1.c) $d = 2 - a; \det(A) = ad - bc = a(2-a) - bc = 0$.

2.a) Aplicăm algoritmul lui Eucid.
$x^6 - 1 = (x^4 - 1)\cdot x^2 + (x^2 - 1)$
$x^4 - 1 = (x^2 - 1)\cdot(x^2 + 1)$, deci $(f, g) = x^2 - 1$

2.b) 8 soluții distincte.

2.c) $f(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Deoarece $f_2(x)=x^2+\ln x$, rezultă $f_2'(x)=2x+\frac{1}{x}>0, \forall x\in(0,\infty)$. Deci f_2 strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

b) Cum $f_n\left(\frac{1}{e}\right)\cdot f_n(1)=\left(\frac{1}{e^n}-1\right)\cdot 1<0$ rezultă că ecuația $f_n(x)=0$ are cel puțin o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e},1\right)$. Cum f_n este strict crescătoare rădăcina este unică.

c) Rezultă $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{f_2(x)-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{x^2+\ln x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Pentru calcul limitei $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{x^2+\ln x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ se utilizează schimbarea de variabilă

$y=x-1$. Se obține $\lim\limits_{y\to0}\left(\frac{3}{(y+1)^2+\ln(y+1)-1}-\frac{1}{y}\right)=\lim\limits_{y\to0}\frac{y-y^2-\ln(y+1)}{y^3+2y^2+y\ln(y+1)}$

și se aplică regula lui l´ Hôspital.

Rezultă $\lim\limits_{y\to0}\frac{y-y^2-\ln(y+1)}{y^3+2y^2+y\ln(y+1)}=\lim\limits_{y\to0}\frac{-2y-\frac{y}{y+1}}{3y^2+4y+\ln(y+1)+\frac{y}{y+1}}$, de unde

$$\lim_{y\to0}\frac{-2-\frac{1}{y+1}}{3y+4+\frac{\ln(y+1)}{y}+\frac{1}{y+1}}=-\frac{3}{5}$$

2. a) Considerăm funcțiile, $g:[-2\pi,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$ și $H:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $h(x)=1+\sin x$.
Deoarece $f(x)=g(x), \forall x\in[-2\pi,0]\setminus\{0\}$ și g este integrabilă pe $[-2\pi,0]$ rezultă *f* integrabilă pe $[-2\pi,0]$.
Analog, deoarece $f(x)=h(x), \forall x\in[0,2\pi]$ și h este integrabilă pe $[0,2\pi]$ rezultă *f* integrabilă pe $[0,2\pi]$.
Prin urmare *f* este integrabilă pe $[-2\pi,0]\cup[0,2\pi]=[-2\pi,2\pi]$.

b) $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$

Cum $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} x^3\,dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0}=-\frac{1}{4}$ și $\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{0}^{\pi}(1+\sin x)\,dx=\left.(x-\cos x)\right|_{0}^{\pi}=\pi+1$,

rezultă $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx=\pi-\frac{3}{4}$

c) Inducție matematică.

Cum $\int_{0}^{2\pi}(1+\sin x)\,dx=\left.(x-\cos x)\right|_{0}^{2\pi}=2\pi$, rezultă $\int_{0}^{2\pi} f(x)dx\le 2\pi$

Presupunem $\int_{0}^{2\pi} f^{n-1}(x)dx\le 2^{n-1}\pi$ și demonstrăm că $\int_{0}^{2\pi} f^{n}(x)dx\le 2^{n}\pi$

Deoarece $0\le 1+\sin x\le 2$ și $\sin x\le 1$ rezultă $(1+\sin x)^{n-1}\le 2^{n-1}$ și
$(1+\sin x)^{n-1}\sin x\le(1+\sin x)^{n-1}$, rezultă

Varianta 63 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $a_{n+1}-a_n=\frac{4(n+1)}{n+4}-\frac{4n}{n+3}=\frac{12}{(n+3)(n+4)}\Rightarrow a_{n+1}-a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow$ şirul este crescător .

2. $x^2+x+1=-x^2-2x+6\Rightarrow 2x^2+3x-5=0\Rightarrow x\in\left\{-\frac{5}{2},1\right\}\Rightarrow A\left(-\frac{5}{2},\frac{19}{4}\right),B(1,3)$

3. $x-\frac{\pi}{4}=3x+\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$,
$x-\frac{\pi}{4}=-3x-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$.

4. $2^n=32\Rightarrow n=5$, $T_4=C_5^3\left(2x^2\right)^2(-5y)^3\Rightarrow T_4=-5000x^4y^3$.

5. $\frac{m}{2}=\frac{3}{n}=\frac{2}{-8}\Rightarrow (m,n)=\left(-\frac{1}{2},-12\right)$.

6. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow AC\perp BD\Rightarrow AB^2=OB^2+OA^2$, $CD^2=OD^2+OC^2$,
$AD^2=OD^2+OA^2$ $BC^2=OC^2+OB^2\Rightarrow$ $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

Soluție

1.a) $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix};A^t=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}=A\Rightarrow A\in P$

$B=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix};B^t=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}=-B\Rightarrow B\in Q$

1.b) $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix};X^t=-X\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{pmatrix}\Rightarrow a=d=0;c=-b$. $X=\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$
$\det(X)=b^2\geq 0$.

1.c) Fie $A,B\in Q\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$. $AB=\begin{pmatrix}-ab&0\\0&-ab\end{pmatrix}=(AB)^t\Rightarrow AB\in P$

2a) $f'(x)=3x^2+4x+3>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare.
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, f este continuă deci are P.D$\Rightarrow f(x)=0$ are o unică soluție reală.

2.b) $\hat{f}\left(\hat{0}\right)=\hat{1},\hat{f}\left(\hat{1}\right)=\hat{1}$

2.c) Dacă $f=gh\infty,grad(h)\geq 1,grad(h)\geq 1\Rightarrow\hat{f}=\hat{g}\cdot\hat{h}$, deci $\hat{f}$ este reductibil, contradicție.

Varianta 63 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $|f(x)| \le |x| \Leftrightarrow |x| \le |x|$, evident. Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $|f(x)| \le |x| \Leftrightarrow |x^3| \le |x|$ și

$|x^3| \le |x| \Leftrightarrow |x|\left(|x|^2 - 1\right) \le 1$, evident pentru $x \in [-1,1] \Leftrightarrow |x| \le 1$

b) Din $|f(x)| \le |x|, \forall x \in [-1,1]$ rezultă $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Cum $f(0) = 0$ rezultă că *f* este continuă în origine.

Deci *f* este continuă în origine.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ rezultă că pentru orice şir $(x_n)_{n\ge 1}$ care are limita 0, şirul $(f(x_n))_{n\ge 1}$ are limita 0.În particular considerând $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$..

2.a) f este continuă şi derivabilă. Din continuitatea lui f rezultă $b = 0$.

Apoi $f'(x) = ae^x + axe^x - 1, \forall x < 0$ și $f'(x) = \cos x - x\sin x, \forall x > 0$.

Cu o consecință a teoremei lui Lagrange rezultă

$\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x) = f'(0) \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$.

b) $\int_{-\pi}^{1} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$.

Dar $\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} x\cos x dx = \int_{-\pi}^{0} x(\sin x)' dx = -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx = \int_{-\pi}^{0} (\cos x)' dx = 2$, iar

$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1}\left(2xe^x - x\right)dx = \frac{3}{2}$. Rezultă $\int_{-\pi}^{1} f(x)dx = \frac{7}{2}$.

c) Dacă $b = 0$, atunci $I_n = \int_0^{\pi} x^n f(x)dx = \int_0^{\pi} x^{n+1}\cos x dx = \int_0^{\pi} x^{n+1}(\sin x)'dx = -(n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin x dx$.

Cum $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in [0,\pi]$, $x^n \sin x \ge 0$, rezultă $I_n \le 0, \forall n \ge 1$. Apoi

$I_n = -(n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin x dx = (n+1)\int_0^{\pi} x^n (\cos x)'dx = -(n+1)\pi^n - n(n+1)I_{n-1}$. Cum $I_{n-1} \le 0, \forall n \ge 2$ rezultă

$I_n \ge -(n+1)\pi^n, \forall n \ge 2$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-(n+1)\pi^n\right) = -\infty$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi} x^n f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = -\infty$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-(n+1)-n^2+n$, $a_{n+1}-a_n=2n$,
   $a_{n+1}-a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n)_{n\in N^*}$ este strict monoton .

2. $f(x)=(x+1)^2, (f\circ g)(x)=(x-2008+1)^2=(x-2007)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

3. $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}-x+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}-x+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

4. $x\geq 3, C_x^{x-1}=x-1, C_{x-1}^2=\dfrac{(x-1)(x-2)}{2}, x^2-x-16\leq 0\Rightarrow x\in\{3;4\}$.

5. $\dfrac{m}{m+2}=\dfrac{m+2}{4m}\neq\dfrac{-1}{-8}\Rightarrow m\in\left\{2;-\dfrac{2}{3}\right\}$.

6. $tgC=tg(\pi-(A+B))=-tg(A+B), tg(A+B)=\dfrac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}\Rightarrow tgC=1\Rightarrow C=\dfrac{\pi}{4}$.

Soluție

1.a) Fie $Y=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}; AX=XA\Rightarrow t=x, y=3z$

1.b) $\det(X)=x^2-3y^2=0;$ Dacă $y=0\Rightarrow x=0\Rightarrow X=0_2$.Dacă $y\neq 0\Rightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=3\Rightarrow\dfrac{x}{y}\in\{\pm\sqrt{3}\}$,

contradicție.

1.c) Dacă $X=\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{Z}\Rightarrow XY=\begin{pmatrix} ac+3bd & 3(bc+ad) \\ bc+ad & ac+3bd\end{pmatrix}$.

Utilizând metoda inducției matematice,rezultă concluzia.

2a) $f(1)=0$

2.b) $\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2-2\left(\sum_{1\leq i<j\leq 5}x_ix_j\right)=-5$

2.c) $f(x)=(x-1)(x^4+3x^2+2x+2)$; $x^4+3x^2+2x+2=(x^2+1)^2+(x+1)^2>0$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

1.a) $f(x)=\ln\frac{x+2}{x}=\ln(x+2)-\ln x$. Rezultă $f'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}, x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$.

Apoi $f''(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{4x+4}{x^2(x+2)^2}, x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$.

Dacă $x\in(-\infty,-2)$ atunci $0>x+2>x$, deci $(x+2)^2<x^2$ și rezultă $f''(x)<0$, deci f este concavă pe $(-\infty,-2)$.

b) $a_n=\ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right)-\ln\frac{n(n+1)}{2}$. Deci $a_n=\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\ln\frac{n(n+1)}{2}=\ln\frac{n+2}{n}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+2}{n+1}=0$.

c) Considerăm funcția $h:[1,2]\to\mathbb{R}, h(x)=(x-1)f(x)$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției h.

Deci există $c\in(0,1)$ astfel încât $h'(c)=\frac{h(2)-h(1)}{1}$, de unde $f(c)+(c-1)f'(c)=f(2)$.

2.a) $\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx$. Apoi $\int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}dx$.

Deci $\int_0^1 xf(x)\,dx==\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}dx=\frac{1}{2}arctg(x^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}$.

b) Se observă că $\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^4}\le 1, \forall x\in[0,1]$. Aplicând proprietatea de monotonie a integralei rezultă

$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\le\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx\le\int_0^1 1dx$, de unde $\frac{\pi}{4}\le\int_0^1 f(x)dx\le 1$.

c) $\int_0^x\frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{(f(t))^2}dt=\int_0^x\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'dt=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(0)}{f(0)}$

Deoarece $f'(x)=-\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$ rezultă $f'(0)=0$. Deci $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln f(x)\Big|_0^1=\ln 2$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Rația este : $17-13=4$. $a_2=a_3-4=9 \Rightarrow a_1=a_2-4=5$.

2. $f(-x)=(-x)^3+2\sin(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ funcția f este impară .

3. $tgx=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x\in\left\{\frac{5\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este 900 . Numărul cazurilor favorabile se obține din $a+b+c=4$, unde $a\in\{1,2,...,9\}$,iar $b,c\in\{0,1,...,9\}$, deci sunt 10 cazuri. $p=\frac{10}{900}=\frac{1}{90}$.

5. $-\frac{m}{3}\cdot\left(-\frac{12}{2}\right)=-1 \Rightarrow m=\frac{-1}{2}$.

6. $\sin\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție:

1.a) $a=2, b=0$

1.b) $a=4, b\neq -2$

1.c) $a\neq 4; b=-a+2 \Rightarrow x,y,z\in\mathbb{Z}$ .Pentru $a=4$, $b=-2$.

1.c) În egalitatea $X^2=0_3$ trecând la determinant se obține $a=\hat{0}$ .Cum $X=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\\ b&c&\hat{0}\end{pmatrix}, b,c\in\mathbb{Z}_2$ verifică egalitatea $X^2=0_3$, rezultă că avem 4 soluții.

2.a) Cum $a,b,c\in\mathbb{Z}_2$ și variază independent , rezultă că A are 8 elemente

2b) $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0&0\\0&a^2&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$ .Dacă $a=\hat{0}\Rightarrow X^2=0_3$ .Dacă $a=\hat{1}\Rightarrow X^2=I_3$.

2.c) $a=\hat{0}, b,c\in\mathbb{Z}_2 \Rightarrow 4$ soluții.

Dacă $b\neq 0$ atunci $c=\frac{1-a^2}{b} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}a&b\\ \frac{1-a^2}{b}&-a\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}^*$

Dacă $b=0$, atunci $c\in\mathbb{R}$, $a^2=1$, $a\in\{-1,1\}$ și obținem $A=\begin{pmatrix}1&0\\c&-1\end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix}-1&0\\c&1\end{pmatrix}, c\in\mathbb{R}$.

Varianta 65 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x)=1+e^x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci *f* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.Rezultă căeste injectivă. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ şi *f* este continuă rezultă $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$. Prin urmare *f* este surjectivă. Fiind injectivă şi surjectivă, *f* este bijectivă.

b) Fie funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=x+e^x-(2x+1)$. Deci $h(x)=e^x-x-1$.

Rezultă $h'(x)=e^x-1$ şi următorul tabel de variație:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-----$	0	$+++++++$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Din tabelul de variație rezultă $h(x)=x+e^x-(2x+1)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, de unde

$f(x)\geq 2x+1,\forall x\in\mathbb{R}$

Rezultă $f(l)=1+l$, de unde $l+e^l=1+l$ cu soluția unică $l=0$.

2.a) Deoarece *F* este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției *f*, atunci $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Deci $\left(4F(x)\right)'=4f(x)=4\sin^3 x\cos x$.

Apoi $\left(\sin^4 x\right)'=4\sin^3 x\cos x$. Deci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

b) Aria subgraficului este $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

Dar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\frac{1}{4}\sin^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$. Cum $\frac{1}{4}\sin^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$

rezultă că aria cerută este $\frac{1}{4}$.

c) $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=\int_0^{\pi}\sin^{6n+3}x\cos^{3n+1}xdx$. Pentru calculul integralei $\int_0^{\pi}\sin^{6n+3}x\cos^{3n+1}xdx$ utilizăm schimbarea de variabilă $\cos x=t$. Rezultă $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=-\int_{-1}^{1}t^{3n+1}\left(1-t^2\right)^{3n+1}dt$.

Deoarece funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=t^{3n+1}\left(1-t^2\right)^{3n+1}$ rezultă $\int_{-1}^{1}t^{3n+1}\left(1-t^2\right)^{3n+1}dt=0$,

deci $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=0$.

Varianta 66 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $(2+i)(3-2i)=8-i\,,(1-2i)(2-i)=-5i \Rightarrow 8-6i$

2. $f(x)=3x-[3x]$,

$f(x+\frac{1}{3})=\left\{3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\}=\{3x+1\}=3x+1-[3x+1]=3x+1-[3x]-1=3x-[3x]=\{3x\}f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{3}$ este o perioadă a funcției f .

3. $x=\pi$ verifică ecuația. $tg\frac{x}{2}=t\Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},t=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$.

4. $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}=\frac{20!}{10!10!}\cdot\frac{9!11!}{20!}=\frac{11}{10}$.

5. $m+4=2+2,n+5=3+2\Rightarrow (m,n)=(0;0)$.

6. $\frac{\sin x}{\cos x}=4\Rightarrow\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=16\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{17}$.

Soluție

1.a) $m=7$

1.b) $M_1(1,1);M_2\left(\frac{4m-3}{25},\frac{3m+4}{25}\right);M_3\left(\frac{2m-9}{5},\frac{12-m}{5}\right),m\in\mathbb{Z}.$

Considerăm $m=25k+7,k\in\mathbb{Z}$

1.c) $S=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|,\Delta=\frac{1}{25}(-m+7)(14-2m);S=1\Leftrightarrow m\in\{2,12\}$

2a) $f(-1)=0$

2.b) $f(x)=(x+1)\left(2x^2-(a+2)x+2\right)$; Rădăcinile sunt reale pentru $a\in(-\infty,-6]\cup[2,\infty)$

2.c) $x_1=-1;x_3=\frac{1}{x_2};|x_2|+|x_3|=2\Leftrightarrow|x_2|=1\Leftrightarrow a\in[-6,2)$

Varianta 66 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Explicitând modulul, rezultă $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x^2-1}, x\in(-\infty,1]\cup[1,\infty)\\ 1-\sqrt{1-x^2}, x\in(-1,1)\end{cases}$, de unde rezultă

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \forall x\in(-1,1)$.

b) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y=mx+n$, unde $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ și

$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$. Deci :

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}+1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+1\right)=1.$$

Prin urmare, ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y=-x+1$.

c) Pentru $x\in[1,\infty)$ rezultă $1-x^2\le 0$, deci $1-x^2\le\sqrt{\left|1-x^2\right|}$. Prin urmare

$0\le\frac{1-\sqrt{\left|1-x^2\right|}}{x^2}\le 1, \forall x\in\left(\sqrt{2},\infty\right)$. Deci $-1\le g(x)\le 1, \forall x\in\left(\sqrt{2},\infty\right)$

Deoarece $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{1}{2}$, funcția *g* poate fi

prelungită prin continuitate în 0 punând $g(0)=\frac{1}{2}$.

Cum *g* este continuă pe intervalul $\left[0,\sqrt{2}\right]$, rezultă că pe acest interval *g* este

mărginită, adică există $M>0$ astfel încât $\left|g(x)\right|\le M, \forall x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$.

Cum $\left|g(x)\right|\le 1, \forall x\in\left(\sqrt{2},\infty\right)$ rezultă $\left|g(x)\right|\le\max\{1,M\}, \forall x\in[0,\infty)$.

Aceasta probează că *g* este mărginită.

2.a) $\int_0^{3/4}\frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt=\int_0^{3/4}\frac{2t+1}{1-\sqrt{1-t}}dt$. Utilizăm schimbarea de variabilă $\sqrt{1-t}=u\Leftrightarrow t=1-u^2, \forall t\in[0,1]$.

Deci $\int_0^{3/4}\frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt=\int_0^{3/4}\frac{2t+1}{1-\sqrt{1-t}}dt=-\int_1^{1/2}\frac{3-u^2}{1-u}\cdot 2u\,du=2\int_0^{1/2}\frac{3u-u^3}{1-u}\cdot du=$

$$=2\int_0^{1/2}\frac{3u-u^3}{1-u}\cdot du=2\int_0^{1/2}\left(u^2+u-2-\frac{2}{u-1}\right)du=\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}-2u+\ln(1-u)\right)\Big|_0^{1/2}=-\frac{55}{64}-\ln 2$$

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $g(x)=t\Leftrightarrow x=f(t)$.

Astfel rezultă $\int_1^3 g(x)dx=\int_0^1 tf'(t)dt$, apoi aplicăm integrarea prin părți.

Deci $\int_1^3 g(x)dx=\int_0^1 tf'(t)dt=tf(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)dt=f(1)-\int_0^1 f(x)dx=3-\int_0^1 f(x)dx$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. , $b_3^2 = 6 \cdot 24 \Rightarrow b_3 = 12$ $q = \frac{b_3}{b_2} = 2 \Rightarrow$ $b_1 = 3$.

2. $3 - m^2 > 0 \Rightarrow m \in \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

3. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{3} = 0, \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Numărul cazurilor posibile este: 3^3. Numărul cazurilor favorabile este : $3! = 6 \Rightarrow p = \frac{2}{9}$.

5. $\frac{GP}{AB} = \frac{1}{3}, \overrightarrow{GP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$.

6. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{-7}{9}$.

Soluție

1.a) $\det A = (m-1)^2$

1.b) Dacă $m \neq 1 \Rightarrow rangA = 3$. Dacă $m = 1 \Rightarrow rangA = 1$

1.c) Caz de incompatibilitate $m = 1$.

Dacă $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \Rightarrow x = 1 + \frac{3}{m-1}; y = 0; z = \frac{-3}{m-1}$ .Deci $m | 3 \Rightarrow m \in \{-2, 0, 2, 4\}$

2a) Calcul direct

2.b) $\alpha = [1234], \beta = [1342]$

Sau se calculează puterile consecutive ale lui α,β.

2.c) $x \cdot \beta^{-1} = \alpha^{-1} \cdot x \Leftrightarrow \alpha \cdot x = x \cdot \beta$. $\gamma = x$

Varianta 67 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) într-adevăr, *f* este o funcție de două ori derivabilă, $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, deci $f'(0)=1$. Evident $f(0)=0$.

b) Suntem în cazul 1^∞. Dar $(1+f(x))^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+f(x))}$. Deci avem de calculat $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+f(x))}{x}$ (cazul $\frac{0}{0}$).

Cu regula lui l´Hôpital, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{1+f(x)}=f'(0)$, cea ce este evident deoarece $f(0)=0$.

c) $f^n(x)-x^n=(f(x)-x)\cdot\left(f^{n-1}(x)+xf^{n-2}(x)+...+x^{n-2}f(x)+x^{n-1}\right)$. Apoi:

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{n-1}(x)}{x^{n-1}}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{xf^{n-2}(x)}{x^{n-1}}=1,....,\ \lim_{x\to0}\frac{x^{n-2}f(x)}{x^{n-1}}=1,\lim\frac{x^{n-1}}{\underset{x\to0}{x^{n-1}}}=1 \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}. \text{ Deci}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}\cdot\left(\frac{f^{n-1}(x)}{x^{n-1}}+\frac{xf^{n-2}(x)}{x^{n-1}}+\frac{x^{n-2}f(x)}{x^{n-1}}+\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}}\right)=\frac{nf''(0)}{2}$$

2. a) $g(x)=\int\limits_0^x f(t)dt=\int\limits_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)$.

b) $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2}dx$. Apoi:

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2}dx=-\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}\right)'\ln(1+x)dx=-\frac{1}{2}\ln2+\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx \text{ şi}$$

$$\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\left(\frac{1}{x+1}\right)'\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}. \text{ Rezultă } \int_0^1 f^2(x)g(x)dx=\frac{1-\ln2}{2}.$$

c) Notăm $s_n=\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.Rezultă

$$f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...f\left(\frac{n}{n}\right)=ns_n$$

Pentru funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$ și pentru fiecare $n\ge1$

formăm diviziunea echidistantă $\Delta_n=\left(x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<...<x_n=\frac{n}{n}=1\right)$,

iar în fiecare interval $[x_{i-1},x_i]$ alegem punctul intermediar $c_i=x_i=\frac{i}{n}$.

Astfel se observă că suma s_n este chiar suma Riemann asociată funcției *f*,

diviziuni Δ_n și punctelor intermediare c_i: $\sigma_n(f,c_i)=\sum\limits_{i=1}^n f(c_i)(x_i-x_{i-1})=s_n$.

Varianta 68 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\dfrac{25(4-3i)}{25}+\dfrac{25(4+3i)}{25}=8$.

2. $m^2-2<0 \Rightarrow m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

3. $arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow arctg\dfrac{x}{3}=\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x=\sqrt{3}$.

4. Numărul cazurilor posibile este : $90:2=45$. Numărul cazurilor favorabile se obține din $4\cdot 3, 4\cdot 4, ..., 4\cdot 24$, adică 22 . $p=\dfrac{22}{45}$.

5. $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$ și $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$.

6. $\sin\dfrac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{12}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

.

Soluție

1.a) $B+B^t=A-A^t+A^t-A=0_3$

1.b) $\det B=(-1)^3\det B \Rightarrow \det B=0$

1.c) Dacă $x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow B=x\left(A-A^t\right) \Rightarrow \det B=0$

2.a) $x\left(x^2+1\right)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=i, x_3=-i$

2.b) $i(p+2)+p+q-2=0, p,q\in\mathbb{R} \Rightarrow p=-2, q=4$

$S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n, n\in\mathbb{N}. S_n=-pS_{n-2}-qS_{n-3}, \forall n\geq 3$

2.c) $S_0=3, S_1=0, S_2=-2p, S_3=-3q, S_4=2p^2, S_5=5pq$

$S_6=-2p^3+3q^2, S_7=-7p^2q$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Pentru $x>0$ rezultă $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(2x+1)-\ln(2x+3)$. Rezultă $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+3}$,

de unde $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2(2x+1)(2x+3)}$.

b) Deoarece $f'(x)>0$ rezultă că funcția *f* este strict crescătoare. Din $0<x<t$ rezultă $f(x)<f(t)$.

Cum $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$, rezultă $f(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

c) $x_{n+1}-x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln\left(n+1+\frac{1}{2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$.

Rezultă $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{2n+1}{2n+3}=f(n)<0$, iar din $x_{n+1}-x_n<0$ rezultă șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2. a) Funcția *f* este o funcție impară prin definiție dacă. $f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Utilizăm schimbarea de variabilă $t=-u$. Rezultă $f(-x)=\int\limits_0^{-x} e^{t^2}dt=-\int\limits_0^{x} e^{u^2}du=-\int\limits_0^{x} e^{t^2}dt=f(x)$.

b) Deoarece $e^x>x, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă $e^{t^2}>t^2$. Atunci $\int\limits_0^x e^{t^2}dt>\int\limits_0^x t^2dt$, de unde $\int\limits_0^x e^{t^2}dt>\frac{x^3}{3}$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{3}=\infty$ rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^x e^{t^2}dt=\infty$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

c) $e^{t^2}\leq e^t, \forall t\in[0,1]$.

Rezultă $\int_0^x e^{t^2}dt\leq\int_0^x e^t dt, \forall x\in[0,1]$, deci $f(x)\leq e^x-1, \forall x\in[0,1]$.

Prin urmare $\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1\left(e^x-1\right)dx=e-2$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\bar{z}+7i=6z, z=x+yi; x,y\in\mathbb{R}, \bar{z}=x-yi, x-yi+7i=6(x+yi)\Rightarrow x=0, y=1\Rightarrow z=i$.

2. $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)=\dfrac{(3+101)50}{2}=2600$.

3. Dacă f ar fi surjectivă, atunci ar exista $x_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x_0)=0$.
$3x_0+1=0\Rightarrow x_0=-\dfrac{1}{3}\notin\mathbb{N}$. Deci f nu e surjectivă $\Rightarrow$ f nu este bijectivă $\Rightarrow f$ nu este inversabilă.

4. $x!(x+1-1)\le 100\Rightarrow x!\cdot x\le 100$, $0!\cdot 0, 1!\cdot 1, 2!\cdot 2, 3!\cdot 3, 4!\cdot 4\le 100$, $x!\cdot x>100, \forall x>4$,
$p=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.

5.Punctul lor de intersecție este $M(0,1)\in Oy$.Punctele $A(-1,-1)\in d_1, B(1,-1)\in d_2$ sunt simetrice față de Oy, deci dreptele sunt simetrice față de Oy.

6. $\cos\dfrac{7\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right), \cos\dfrac{7\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}, \cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Soluție

1.a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}; A^3=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Se verifică relația.

1.b) $A^3-A=A^2-I_3; A^5-A^3=A^4-A^2; A^7-A^5=A^6-A^4; ..., A^{2n+1}-A^{2n-1}=A^{2n}-A^{2n-1}$
Prin însumare obținem: $A^{2n+1}-A=A^{2n}-I_3; A^{2n+2}-A^2=A^{2n+1}-A\Rightarrow$
$A^{2n}-A^2=A^{2n-1}-A\Rightarrow A^{2n+1}-A^{2n-1}=A^2-A=I_3$; $A^{2n+2}-A^{2n}=A^2-I_3$

1.c) Demonstrație prin inducție.Verificare pentru $n=1, n=2$.Presupunem adevărată pentru toate valorile $\le n-1$ și o dem.pt. n. Utilizând relația $A^n=A^{n-2}+A^2-I_2$,rezultă concluzia.

2.a) $x^4-1=0$ are soluțiile complexe: $x_1=1, x_2=-1, x_3=i, x_4=-i$

2.b) $P_3=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$ unde $\varepsilon_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

2.c) $x^{12}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)\ (x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

Varianta 69 - rezolvari mate MT1

Soluție

1. a) Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ și $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$, dintr-o consecință a teoremei lui Lagrange, rezultă $f_s'(0)=-\infty$.

Analog, $f_d'(0)=\infty$. Deci f nu este derivabilă în 0.

b) Deoarece funcția f este continuă pe intervalul $[k,k+1]$ și derivabilă pe intervalul $(k,k+1)$, aplicăm teorema lui Lagrange . Rezultă existența unui punct $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

c) Din $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-f(n+1)-(a_n-f(n))=a_{n+1}-a_n-(f(n+1)-f(n))$ rezultă

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{c_n}}$ cu $c_n\in(n,n+1)$. Dar din $c_n\in(n,n+1)$ rezultă $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{c_n}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Prin urmare $b_{n+1}-b_n<0$, așa încât șirul $(b_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător.

2.a) $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx=\int_0^1 x'\ln(1+x)\,dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$, apoi

$x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\frac{4}{e}$.

Rezultă $\int_0^1 f(x)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^1-\ln\frac{4}{e}=\frac{5}{12}-\ln\frac{4}{e}$.

b) Cum $F(0)=0$, aplicăm regula lui l´Hôspital: $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{F'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{5x^4}$. Dar

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x+x^2-\frac{1}{1+x}}{20x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{20x^3(1+x)}=\frac{1}{20}$.

c) $f'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}$. Cum, pe $(-1,0)$ derivata f' este negativă, iar pe $(0,\infty)$ este pozitivă, rezultă că 0 este punct de minim absolut, deci $f(x)\ge f(0)=0$.

Rezultă $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ge\ln(1+x)$ .din care se obține $\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx\ge\int_0^1\ln(1+x)dx$

Dar $\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{5}{12}$, deci $\int_0^1\ln(1+x)dx\le\frac{5}{12}$.

Varianta 70 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $(1+i)^{20} = \left[(1+i)^2\right]^{10} = (2i)^{10} = -1024$.

2. $f\left(f(x)\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, $(-10)+(-9)+...+(-1)+1+...+10 = 0$.

3. $f(x_1) = f(x_1) \Rightarrow x_1^3 + 1 = x_1^3 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ este injectivă .

4. $\frac{5!}{2!} - 6 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 0$.

5. $\frac{\left|3m - 4(m+1) - 1\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 \Rightarrow m \in \{-10;0\}$.

6. $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2\sin 45^\circ \sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluție

1.a) $[A, A^2] = A^3 - A^3 = 0_2$

1.b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

1.c) $[A, BC - CB] = ABC - ACB - BCA + CBA$ **.**Prin permutări circulare se obțin celelalte două relații.Adunând se obține egalitatea.

2.a) $0 < a < 1, 0 < b < 1 \Rightarrow ab \in (0,1), (1-a)(1-b) \in (0,1)$

2.b) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare , deci injectivă. f este continuă deci

Are P.D . , $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{Im} f = (0,1) \Rightarrow f$ surjectivă, deci bijectivă.

Se verifică egalitatea.

2.c) $f(1) = \frac{1}{2}; \exists! y > 0, f(y) = x; f\left(y^3\right) = x \circ x \circ x = f(1) \Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Prin inducție demonstrăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x) = 2^{n+1} e^{2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr $f_1(x) = f_0'(x) = 2e^{2x}$. Presupunem că $f_n(x) = 2^n e^{2x}$ și rezultă că $f_{n+1}(x) = 2^{n+1} e^{2x}$. Pentru $n = 3$ rezultă $f_3(x) = 8e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2^n e^{2x} = 0$ rezultă că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 2^n e^{2x} = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^n e^{2x}}{x} = \infty$ rezultă că f_n nu are alte asimptote.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_1(a) + f_2(a) + ... + f_n(a)}{f_{n+1}(a)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2e^{2a} + 2^2 e^{2a} + ... + 2^n e^{2a}}{2^{n+1} e^{2a}}$, apoi

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2e^{2a} + 2^2 e^{2a} + ... + 2^n e^{2a}}{2^{n+1} e^{2a}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}}{2^n}$ și

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 1$.

2. a) Funcția *f* este continuă pe intervalul $(0, \infty)$ deoarece pe acest intervale *f* se obține prin operații cu funcții continue. Continuitatea în 0:

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} x^2 \ln^2 x = \left(\lim_{x\nearrow 0} x \ln x\right)^2 = \left(\lim_{x\nearrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\lim_{x\nearrow 0} (-x)\right)^2 = 0 = f(0).$$

Deci *f* este continuă și în 0.
Rezultă f continuă pe $[0, \infty)$ și prin urmare este integrabilă pe $[0,1]$

b) Se aplică succesiv integrarea prin părți

$$\int_t^1 f(x)dx = \int_t^1 x^2 \ln^2 x dx = \frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_t^1 - \frac{2}{3}\int_t^1 x^2 \ln x dx = -\frac{t^3}{3}\ln^2 t - \frac{2}{9}x^3 \ln x\Big|_t^1 + \frac{2}{9}\int_t^1 x^2 dx =$$

$$= -\frac{t^3}{3}\ln^2 t + \frac{2}{9}t^3 \ln t + \frac{2}{27}x^3\Big|_t^1 = -\frac{t^3}{3}\ln^2 t + \frac{2}{9}t^3 \ln t - \frac{2}{27}t^3 + \frac{2}{27} =$$

$$= -\frac{t^2}{3}(t\ln t)^2 + \frac{2t^2}{9}(t \ln t) - \frac{2}{27}t^3 + \frac{2}{27}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} t \ln t = 0$ rezultă $\lim\limits_{t\searrow 0} \displaystyle\int_t^1 f(x)dx = \frac{2}{27}$, deci $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{27}$

c) Deoarece $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}\ln^2 \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\ln^2 x, \forall x \ge 1$ rezultă $\displaystyle\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^e (\ln x)' \ln^2 x dx = \ln^3 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \frac{1}{x}\ln^2 x dx$.

Prin urmare $\displaystyle\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)dx = 1 - 2\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)dx$, de unde $\displaystyle\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\log_2 2008 - \log_2 251 - 3 = \log_2 \frac{2008}{251} - 3 = \log_2 8 - 3 = 0$

2. $f(-x) = (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2}, (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2} = x^2 - \frac{1}{x^2}, f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ funcția f este pară .

3. $x \neq 0 \Rightarrow x^4 > 0 \Rightarrow 3 - x^4 < 3, f(0) = 3 \Rightarrow f(x) \leq f(0), \forall x \in \mathbb{R}$, deci valoarea maximă este $f(0)$.

4. $3n + 2\frac{n(n-1)}{2} = 8 \Rightarrow n = 2$.

5. $\frac{A'C}{A'B} = 2, \frac{C'B}{C'A} = \frac{1}{3}, \frac{B'A}{B'C} = \frac{3}{2}$,
$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{B'A}{B'C} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow AA', BB'$ și CC' sunt concurente .

6. $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$,ecuația este $y = 2$.

Soluție

1.a) $D_2 = 3; D_3 = 4$
1.b) Se dezvoltă determinantul după prima linie.
1.c) Se demonstrează prin inducție , varianta 2. Verificare $n = 2, n = 3$.
Dacă este adevărată pentru $2 \leq k \leq n-1, D_n = 2n - (n-1) = n+1$.

2.a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \left\{ \left(\hat{0},\hat{0}\right), \left(\hat{0},\hat{1}\right), \left(\hat{1},\hat{0}\right), \left(\hat{1},\hat{1}\right) \right\}$ .Se completează tabla operației de adunare .

2.b) $(xy)^2 = e, x^2y^2 = ee = e$

2.c) $x = x^{-1}, \forall x \in G; \forall a,b \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = ab = b^{-1}a^{-1} = ba$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Succesiv rezultă $f'(x)=x'-\ln'(1+x)$, $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}$, $f'(x)=\frac{x}{1+x}$.

b) Deoarece $f'(x)>0, \forall x\in(0,\infty)$ rezultă că *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Din $x>0$ și *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, rezultă $f(x)>f(0)=0$.

c) $f(x)=x-\ln(1+x)$ implică $f(x)=\ln e^x-\ln(1+x)$. Rezultă $f(x)=\ln\frac{e^x}{1+x}$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

2.a) $F(x)=\int_1^2 t^x dt=\left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right|_1^2=\frac{2^{x+1}-1}{x+1}$

Rezultă $(x+1)\int_1^2 t^x dt=2^{x+1}-1$, de unde: $1+(x+1)\int_1^2 t^x dt=2^{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}$, deci $1+(x+1)F(x)=2^{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Deoarece $\int_1^2 t^x dt=\frac{2^{x+1}-1}{x+1}$ rezultă $\lim\limits_{x\to-1}\int_1^2 t^x dx=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2^{x+1}-1}{x+1}$.Utilizăm regula lui l´ Hôspital se obține că:

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{2^{x+1}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}2^{x+1}\ln 2$. Dar

$\lim\limits_{x\to-1}2^{x+1}\ln 2=\ln 2$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^2 t^x dx=\ln 2$.

c) Din teorema de existență a primitivelor unei funcții continue,
rezultă că *F* este o primitivă a funcției *f*. Deci $F'(x)=f(x), \forall x\in(-1,\infty)$.

Rezultă $f(x)=\left(\frac{2^{x+1}-1}{x+1}\right)'=\frac{(x\ln 2+\ln 2-1)2^{x+1}+1}{(x+1)^2}$.

Varianta 72 - rezolvari mate MT1

inisterul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2008}=\cos\frac{2008\pi}{4}+i\sin\frac{2008\pi}{4}\Rightarrow\ \cos 502\pi+i\sin 502\pi=\cos 0+i\sin 0=1$.

2. $f(-x)=(-x)^3-\frac{1}{-x},(-x)^3-\frac{1}{-x}=-x^3+\frac{1}{x}=-\left(x^3-\frac{1}{x}\right),f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}^*\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ impară .

3. $x_v=\frac{1}{2}\notin[1\ ;\ 4],f(1)=0,f(4)=12\Rightarrow f([1,4])=[0,12]\Rightarrow A=[0,12]$.

4. $(5-4)^{2008}=1.$

5. $m_d=-\frac{4}{-2}\Rightarrow m=-\frac{1}{2},\ y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow\ x+2y-5=0$.

6. $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{\sin 90^\circ+\sin 60^\circ}{2},\sin 90^\circ=1,\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\ \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Soluție

1.a) $A^2=3A;x=-\frac{1}{9}$

1.b) $B=\frac{1}{\sqrt{3}}A$

1.c) Prin calcul direct

2.a) $x_1=2;x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{2}$

2.b) $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n,\forall n\geq 0;S_0=3,S_1=0,S_2=2$, $S_3=18,S_4=2$

2.c) Se scriu relațiile lui Viète, se obține $m=0$

Varianta 72 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y = mx + n$, unde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+x} = 1 \text{ și } n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

b) $f'(x) = \dfrac{\left(x^2+x+1\right)' \cdot (x+1) - \left(x^2+x+1\right) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}$. Deoarece $\left(x^2+x+1\right)' = 2x+1$.

rezultă $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

c) Cum $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$, rezultă $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -1)$.

Deoarece $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -1)$, funcția *f* este concavă pe intervalul $(-\infty, -1)$.

2. a) $\int_0^{\pi} f_2(x)dx = \int_0^{\pi} |\sin 2x| dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x dx = -\dfrac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \dfrac{\cos 2x}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 0$

b) Cum $\dfrac{|\sin(nx)|}{x} \le \dfrac{1}{x}, \forall x \in [\pi, 2\pi]$, rezultă $I_n = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x} dx \le \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x} dx$.

Dar $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x} dx = \ln 2$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $nx = t$.
Atunci $x = \pi$ implică $t = n\pi$ și $x = 2\pi$ implică $t = 2n\pi$, iar $ndx = dt$.
Rezultă $I_n = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin nx|}{x} dx = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{\frac{t}{n}} \frac{1}{n} dt = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $|5-12i|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$, $|12+5i|=\sqrt{12^2+5^2}=13$, $|5-12i|-|12+5i|=0$.

2. $f(1)=0$, $f(0)=0$, $(f\circ f\circ f\circ f)(1)=0$.

3. $2^x=t>0\Leftrightarrow t^2+t-20=0\Rightarrow t\in\{-5,4\}\Rightarrow x=2$

4. Numărul cazurilor posibile este : 2005:5+1=402 . Numărul cazurilor favorabile este $\left[\frac{2005}{25}\right]+1=81$. $p=\frac{81}{402}=\frac{27}{134}$.

5. Direcția bisectoarei este dată de $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}=\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{bc}$.
Deci $\overrightarrow{AD}=bc\vec{u}\Rightarrow$ semidreapta $[AD$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$.

6. $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, $\cos^2\alpha=\frac{3}{4}\Rightarrow\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție

1.a) $A_M(1,1)$

1.b) $y'=2x'$

1.c) $x_1'=ax_1+by_1, y_1'=cx_1+dy_1; x_2'=ax_2+by_2\ y_2'=cx_2+dy_2; x_3'=ax_3+by_3, y_3'=cx_3+dy_3$
Se utilizează proprietăți ale determinanților.

2.a) $\det\left(X+X^t\right)=bcd-bcd=0$

2.b) $b=c=d=\hat{0}, a^2=a\Rightarrow 2$ soluții

2.c) $\det X=a^3\neq\hat{0}$ pentru $a=\hat{1}$ .Cum $b,c,d\in\mathbb{Z}_2$ sunt arbitrare, rezultă 8 soluții.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$ rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)g(x)\right) = 0$.

b) Ecuația tangentei la graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în punctul de abscisă 1 este $y-h(1)=h'(1)(x-1)$.

Deoarece $h'(x) = -\dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ rezultă $h'(1) = -\dfrac{1}{2}$. Cum $h(1) = \dfrac{2-\pi}{4}$ rezultă că ecuația tangentei

este $y - \dfrac{2-\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}(x-1)$.

c) Cum $h'(x) < 0, \forall x \in (0,\infty)$, rezultă că funcția *h* este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

Din $x>0$ rezultă $h(x) < h(0) = 0$, de unde concluzia $f(x) > g(x), \forall x \in (0,\infty)$.

2. a) $f_1(x) = \int_0^x f_0(t)dt = \int_0^x 1dt = x$, iar $f_2(x) == \int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x tdt = \dfrac{x^2}{2}$.

Deci $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Prin urmare rezultă $f_1^{\,2}(x) = 2f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$

b) Se demonstrează prin inducție că $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. Prin urmare :

$\dfrac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2} = \dfrac{(n+1)x^{n+1}+(n+1)!}{x^{n+1}+2(n+1)!}$. Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2} = n+1$.

c) Volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[0,\pi]\to[0,\pi]$ este

$vol\left(C_g\right) = \pi\int_0^\pi g^2(x)dx = \pi\int_0^\pi x^2\sin^2 xdx$. Apoi

$\pi\int_0^\pi x^2\sin^2 xdx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi x^2(1-\cos 2x)dx = \dfrac{\pi^3}{6} - \dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi x^2\cos 2xdx$, iar

$\int_0^\pi x^2\cos 2xdx = \dfrac{1}{2}\int_0^\pi x^2(\sin 2x)'dx = -\int_0^\pi x\sin 2xdx$.

Cum $-\int_0^\pi x\sin 2xdx = \dfrac{1}{2}\int_0^\pi x(\cos 2x)'dx = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2xdx = \dfrac{\pi}{2}$, rezultă $vol\left(C_g\right) = \dfrac{\pi^3}{6} - \dfrac{\pi^2}{4}$

Varianta 74 - rezolvari mate MT1

Soluție

1. $z_1 = \frac{-3-7i}{2}, z_2 = \frac{-3+7i}{2}$.

2. $f(0) = -2m + 2 \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty;1]$.
3. $2 - x \geq 0$, $\sqrt{2-x} = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow x = 2$.
4. Ambii membri sunt egali cu $\frac{(a+b)!}{a!b!}$ . .
5. $\frac{2m-2}{3-2} = \frac{1-m-4}{3-4} \Rightarrow m = -5$.

6. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție

1.a) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1.b) se verifică

1.c) Suma cerută este $3 \cdot 5^{10}$

2a) $x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i$

2.b) $p(1) = 0, p'(1) = 0 \Rightarrow a = -2, b = 0$

2.c) Singurele rădăcini raționale ale polinomului $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ sunt $x = \pm 1 \Rightarrow a \in \{-3,1\}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\searrow -2} f(x)=\lim\limits_{x\searrow -2}\ln\frac{2+x}{2-x}=-\infty$ și $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 2}\ln\frac{2+x}{2-x}=\infty$, rezultă ecuațiile asimptotelor: $x=-2$ (asimptotă verticală la dreapta) și $x=2$ (asimptotă verticală la stânga).

b) Deoarece $f'(x)=\frac{2-x}{2+x}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)'=\frac{4}{4-x^2}$ rezultă $f'(x)>0,\forall x\in(-2,2)$, deci *f* este strict crescătoare pe $(-2,2)$.

c) Notăm $\frac{1}{x}=y$. Atunci $y\to 0$ când $x\to\infty$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}f(y)$.Cum $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=f'(0)=1$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

2.a) $f(t)=t^2\int_1^2\frac{1}{x^2}dx-2t\int_1^2\frac{e^x}{x}dx+\int_1^2 e^{2x}dx$. Rezultă $f(t)=At^2-2Bt+C$, unde $C=\int_1^2 e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}\Big|_1^2=\frac{e^4-e^2}{2}$.

b)Prin urmare:

$f(t)=A\left(t-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A}$. Deoarece $A=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}$, rezultă

$f(t)=A(t-2B)^2+2\left(AC-B^2\right)$, de unde $f(2B-t)=At^2+2\left(AC-B^2\right)=f(2B+t),\forall t\in\mathbb{R}$

Prin urmare $f(2B-t)=At^2+2\left(AC-B^2\right)=f(2B+t),\forall t\in\mathbb{R}$.

c) Deoarece $f(t)=At^2-2Bt+C\geq 0,\forall t\in\mathbb{R}$, rezultă $4B^2-4AC\leq 0$,

adică $B^2\leq AC$ din care rezultă $\left(\int_1^2\frac{e^x}{x}dx\right)^2\leq\left(\int_1^2 e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2\frac{1}{x^2}dx\right)$.

Varianta 75 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $x+2y=4, 2x-y=3$, $x+2y=4, 2x-y=3 \Rightarrow (x;y)=(2;1)$.

2. $m-1<0, m^2-3m>0 \Rightarrow m<0$.
3. $\log_4\left(x^2-17\right)=3$, $x^2-17=4^3 \Rightarrow x\in\{-9;9\}$.
4. $T_{k+1}=C_6^k\left(2\sqrt{x}\right)^{6-k}\left(\frac{3}{x}\right)^k \Rightarrow \frac{6-k}{2}-k=0 \Rightarrow k=2 \Rightarrow T_3=2160$.
5. $\overrightarrow{OA}=4\vec{i}-2\vec{j}, \overrightarrow{OB}=2\vec{i}+4\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Rightarrow ABC$ este triunghi dreptunghic ,
   C este mijlocul lui $[AB] \Rightarrow C(3,1)$, $(m,n)=(3,1)$.

6. $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=12$, $BM=\sqrt{AB^2+AM^2} \Rightarrow BM=\sqrt{61}$.

Soluție

1.a) $AB=0_3$

1.b) $A^2=3A, AB=BA=0_3, B^2=3B$ Se verifică relația.

1.c) $\forall x\in\mathbb{R}^* \Rightarrow M_x$ este inversabilă.Deci $\det\left(M_x\right)\neq 0$

2.a) Aplicăm relațiile lui Viète , $\sum_i x_i=a, x_1x_2x_3x_4=1, \sum_{i<j<k} x_ix_jx_k=a$

2.b) Dacă se divide , atunci $p(1)=0, p(-1)=0 \Rightarrow a=1=-1$, contradicție.

2.c) Polinomul este reciproc.Se împarte ecuția $f(x)=0$ prin x^2, se notează $x+\frac{1}{x}=t$, etc.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha$.

Dacă $x<0$ rezultă $1+x<1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}<1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}<\alpha$ și în final $f'(x)<0$.

Dacă $x>0$ rezultă $1+x>1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}>1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}>\alpha$ și în final $f'(x)>0$.

Rezultă *f* strict descrescătoare pe $(-1,0)$ și strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

b) *f* este strict descrescătoare pe $(-1,0)$, deci $x<0\Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, deci $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

Așadar $f(x)>1,\forall x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$, de unde rezultă cea ce trebuia demonstrat.

c) $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-1}>0,\forall x\in(-1,\infty)$. Rezultă *f* convexă pe $[0,\infty)$ .Prin urmare

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2},\forall a,b\in[0,\infty)$. Pentru $a=2x$ și $b=2y$ rezultă inegalitatea din enunț.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big|_0^1=\ln 2$.

b) Deoarece

$$[x]=\begin{cases}1, & x\in[1,2)\\ 2, & x\in[2,3)\\ 3, & x\in[3,4)\\ 4, & x=4\end{cases}\quad \text{rezultă } \int_1^4 f^2(x)[x]dx=\int_1^2 f^2(x)dx+2\int_2^3 f^2(x)dx+3\int_3^4 f^2(x)dx .$$

Prin urmare este suficient să calculăm $\int_a^b f^2(x)dx=\int_a^b\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^2dx=\int_a^b\left(1-\frac{2}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)^2dx$

Dar $\int_a^b\left(1-\frac{2}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)^2dx=\left(x-2\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_a^b=b-2\ln(1+b)-\frac{1}{1+b}-$

$-a+2\ln(1+a)+\frac{1}{1+a}=b-a+2\ln\frac{1+a}{1+b}+\frac{b-a}{(1+a)(1+b)}$.

c) Deoarece $\int_0^n f(x)dx=\int_0^n\frac{x}{1+x}dt=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big|_0^n=\ln(1+n)-n$ **și** $f(k)=1-\frac{1}{k+1}$ rezultă

$a_n=\sum_{k=1}^n f(k)-n+\ln(1+n)=\ln(1+n)-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+1}$. Prin urmare $a_n=1-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)$

$0<a_n\le 1,\forall n\ge 1$, deci șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este mărginit

Șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este crescător. Fiind crescător și mărginit este convergent.

Observație. Șirul are limita $1-\gamma$ unde $\gamma=0,57721...$ este *constanta lui Euler*.

Varianta 76 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1. Avem $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\in\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, pentru $a=-1\in\mathbb{Z}$ şi $b=1\in\mathbb{Z}$.

2. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2=7\in\mathbb{N}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. $C_{2n}^n=C_{2n-1}^n+C_{2n-1}^{n-1}=2\cdot C_{2n-1}^n$.

5. $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}+3\vec{j}$, deci $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=3\sqrt{2}$.

6. Avem $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, deci $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=3$.

Soluţie

1.a) Se dezvoltă determinantul; se obţine $\det A=1+a^2+b^2+c^2$.

b) $A\cdot A^*=\det A\cdot I_3\Rightarrow\det A\cdot\det\left(A^*\right)=\left(\det A\right)^3\Rightarrow\det A\cdot\det\left(A^*\right)=\left(\det A\right)^3$.

Cum $\det A\neq 0\Rightarrow\det\left(A^*\right)=\left(\det A\right)^2$.

c) Avem $A-I_3=\begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ba & b^2 & bc\\ ca & cb & c^2\end{pmatrix}$ şi se observă că orice minor de ordin 2 al matricei *A* este nul. Ca urmare, rangul matricei $A-I_3$ este cel mult 1.

2.a) Dacă $f(x)=f(y)\Rightarrow ax=ay\Rightarrow a^{-1}(ax)=a^{-1}(ay)\Rightarrow x=y$, adică f este injectivă.

Pentru orice $y\in G$, considerând $x=a^{-1}y\in G$, rezultă $f(x)=y$, deci f este surjectivă.

b) $(f_a\circ f_b)(x)=a\cdot f_b(x)=a(bx)=(ab)x=f_{ab}(x),\ \forall x\in G$.

c) Compunerea funcţiilor este asociativă. Elementul neutru este $1_G=f_e\in\mathcal{F}(G)$, unde *e* este elementul neutru din *G*. Dacă a^{-1} este simetricul lui $a\in G$, atunci $f_{a^{-1}}$ este simetricul elementului $f_a\in\mathcal{F}(G)$.

Varianta 76 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

y=1 asimptota orizontala spre $+\infty$

b $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

$f'(x)\neq 0,\ f'(0)>0 \ \Rightarrow\ f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

f strict crescatoare pe $\mathbb{R}$

c $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k(k+1)+1}-\sqrt{k(k-1)+1}\right)=\sqrt{n^2+n+1}-1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+n+1}-1}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n-1\right)}=e^{-\frac{1}{2}}$$

2.a $I_1=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1(-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx=-\dfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\ \Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$

b $I_n=\lim\limits_{\substack{a\to1\\a<1}} J_{a,n},$ unde $J_a=\displaystyle\int_0^a x^n(\sqrt{1-x^2})dx$

$$J_{a,n}=\int_0^a\frac{x^n-x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^a x^{n+1}(\sqrt{1-x^2})dx-\int_0^a x^{n-1}(\sqrt{1-x^2})dx$$

$$=a^{n+1}\sqrt{1-a^2}-a^{n-1}\sqrt{1-a^2}-(n+1)J_{a,n+1}+(n-1)J_{a,n-2}$$

Trecând la limita obținem relația dorită

c $0\le x^n\sqrt{1-x^2}\le x^n,\ \forall x\in[0;1]$

$0\le I_n\le\displaystyle\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$

Varianta 77 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $2a_1 + 5 \cdot 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1.$

2. $0 - 1 - 2 - \ldots - 9 = -45.$

3. $2^x = 8,$ deci $x = 3.$

4. $24 - 6 - 6 = 12.$

5. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$ de unde cerința.

6. $\frac{3}{\sqrt{7}}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. **a)** Prin calcul direct rezultă $\det A = 3\left(1 - m^2\right).$

b) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ rezultă $\det A \neq 0,$ deci $\operatorname{rang}(A) = 3.$

Pentru $m = 1$ sau $m = -1$, există cel puțin un minor de ordin doi nenul în A, deci $\operatorname{rang}(A) = 2.$

c) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, sistemul este compatibil determinat.

Pentru $m = 1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$, care are rangul 2, egal cu rangul lui A, deci sistemul este compatibil (nedeterminat).

Pentru $m = -1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$, care are rangul 3, și cum $\operatorname{rang} A = 2,$ rezultă sistemul este incompatibil.

2. **a)** Se verifică prin calcul direct că $x * y \in G_2, \forall x, y \in G_2,$ adică operația „$*$” este corect definită pe G_2.

Folosind definiția se verifică și asociativitatea și comutativitatea operației. Elementul neutru este $e = \frac{7}{3},$

iar simetricul oricărui element $x \in G_2$ este $x' = \frac{9x - 16}{9(x-2)} = 2 + \frac{1}{9(x-2)} \in (2,\infty) = G_2.$

b) Se arată că φ este bijectivă și că $\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \forall x, y \in G_2.$

c) Dacă $x, y \in [\alpha,\infty)$ și $\alpha \geq 2$, atunci $x * y = 3(x-2)(y-2) + 6(\alpha - 2) + \alpha \geq \alpha,$ deci G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Solutie

1. a) $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ $daca\ x\neq 0\ si\ f(0)=a$; $f(1)=e-1$, $f^{'}(1)=1$ deci

$y=x+e-2$ este ecuatia tangentei

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, deci f este continua in $x=0$ daca si numai daca $f(0)=a=1$

c) Evident f este derivabila pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ si

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}=f^{'}(0)$$

2.a $cu\ \mathrm{tg}\frac{\mathrm{x}}{2}=t$ ramane de calculat $\int\frac{1}{\mathrm{t}^2+2}dt$

si se obtine $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+c$$

b $F'(x)=\frac{1}{3+\cos x}$

$\cos x\in[-1;1]\Rightarrow F'(x)>0$

F strict crescatoare

c $\frac{1}{4}\leq f(x)\leq\frac{1}{2}\ \ \forall \mathrm{x}\in[0;\pi)$

$\frac{x}{4}<\int_0^x f(t)dt\leq\frac{x}{2}$

$\frac{1}{4x}<\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\leq\frac{1}{2x}$, x>0 $\Rightarrow$ limita este egala cu 0

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. 7-7=0.

2. $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

3. $f = x(\log_3 2 - 1)$ este funcție de grad 1, deci este injectivă.

4. $C_8^2 - 8 = 20$.

5. $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$.

6. $1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$, de unde cerința.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Din primele două ecuații rezultă că dacă $(x_0, y_0, 0, 0)$ este soluție, atunci $x_0 = 0,\ y_0 = \frac{1}{3}$. Din a treia ecuație rezultă $p = -2$

b) Matricea sistemului, notată *A*, conține minorul $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, deci $\operatorname{rang} A \geq 2,\ \forall\ m, n \in \mathbb{R}$.

c) Dacă $\operatorname{rang} A = 2$, orice minor de ordin 3 al matricei *A* este nul. Se obține astfel $m = 2,\ n = -12.$ Alegând minorul principal $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$ din teorema Rouché rezultă $p = -2.$

2. a) Se verifică prin calcul direct asociativitatea și comutativitatea. Elementul neutru este $(1, 0)$ iar simetricul unui element (q, k) este elementul $\left(\frac{1}{q}, -k\right) \in G.$

b) $(1,1) * (1,2) * \ldots * (1,10) = (1, 1+2+\ldots+10) = (1, 55)$.

c) <u>*f* morfism</u>: $f\left((q_1,k_1)*(q_2,k_2)\right) = q_1 q_2 2^{k_1+k_2} = f(q_1,k_1) \cdot f(q_2,k_2), \forall (q_1,k_1),(q_2,k_2) \in G$

<u>*f* injectivă</u>: Fie $(q_1,k_1),(q_2,k_2) \in G$, $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ și $q_2 = \frac{m_2}{n_2},\ m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ impare astfel încât $f(q_1,k_1) = f(q_2,k_2)$. Dacă $k_1 \neq k_2$, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $k_1 < k_2$. Atunci, din $q_1 \cdot 2^{k_1} = q_2 \cdot 2^{k_2}$ rezultă $m_1 n_2 = 2^{k_2 - k_1} m_2 n_1$, contradicție, deoarece membrul stâng este impar, iar membrul drept este par. Ca urmare, $k_1 = k_2$, de unde $q_1 = q_2$.

<u>*f* surjectivă</u>: pentru orice număr rațional $r = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z}^*$, există $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ impare și $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = 2^a m_1$ și $n = 2^b n_1$. Notând $q = \frac{m_1}{n_1},\ k = a - b,$ rezultă $f(q,k) = \frac{m}{n}.$

Varianta 78 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$l = -2$ $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$

y=x asimptota oblica spre ∞

b) $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$

f nu e derivabila pentru x $\in \{1, -2\}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2arctgf(x) - \pi}{x-1}$ nedeterminarea $\frac{0}{0}$

$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{1+f^2(x)} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$l = -2$

2.a) $I_1 = \int_1^2 (x-1)(2-x)dx$

$$I_1 = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2$$

$I_1 = \frac{1}{6}$

b) Cu schimbarea x=$\frac{3}{2} - y$ obtinem $I_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{4} - x^2)^n dx$

$$I_n = \frac{1}{4} I_{n-1} + \frac{1}{2n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\left(\left(\frac{1}{4} - x^2\right)^n\right)' dx$$

de unde rezultã relatia cerutã

c) $0 \le (x-1)(2-x) \le \frac{1}{4}$, $\forall$x $\in$ [1;2]

$0 \le I_n \le \int_1^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $\sqrt{2} < \log_2 3 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{2}} < 3.$ Avem $2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} = 2\sqrt{2} < 3,$ de unde cerința.

2. 1 și 3.

3. $x = 0;\ x = 1.$

4. $C_5^0 + C_5^2 \cdot 2 + C_5^4 = 41.$

5. $\frac{3}{2}.$

6. $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{7}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Sistemul are soluție unică dacă determinatul matricei A a sistemului este nenul. Cum $\det A = m^2 - 6m + 5,$ sistemul are soluție unică pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,5\}.$

b) Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$ sistemul este compatibil determinat

Pentru $m = 1,$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2,$ adică sistemul este compatibil nedeterminat

Pentru $m = 5$ rezultă $\operatorname{rang} A = 2$ și $\operatorname{rang} \overline{A} = 3,$ deci sistemul este incompatibil

c) Pentru $m = 1$ se obține soluția $x = 1 - \alpha,\ y = \alpha,\ z = 0,$ unde $\alpha \in \mathbb{R}.$ Înlocuind în relația $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14,$ rezultă $\alpha \in \{-2, 6\}.$ Soluțiile căutate sunt $(3,-2,0)$ și $(-5,6,0).$

2.a) $\frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \left\{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right\} = \frac{5}{12}.$

b) Comutativitatea este imediată. Asociativitatea: folosind relația $\{x+n\} = \{x\},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$, rezultă:

$(x*y)*z = \{x*y+z\} = \{\{x+y\}+z\} = \{x+y-[x+y]+z\} = \{x+y+z\}$

$x*(y*z) = \{x+y*z\} = \{x+\{y+z\}\} = \{x+y+z-[y+z]\} = \{x+y+z\}.$

Elementul neutru este $e = 0,$ simetricul lui 0 este 0, iar simetricul oricărui element $x \in (0,1)$ este $1 - x.$

c) Ecuația se poate scrie sub forma $\{3x\} = \frac{1}{2}.$ Cum $0 \le 3x < 3,$ rezultă $3x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right\}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a)

$f'(x) = 3e^{3x} + 2$, f(0)=2, f'(0)=5

y-2=5x

b) f'(x)>0 $\Rightarrow$ f strict crescătoare $\Rightarrow$ f injectivă

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$, f continua $\Rightarrow$ f surjectiva

f bijectiva $\Rightarrow$ f inversabila

c) Suma este egala cu $\frac{1}{e^3-1}$ $e^{-3} + e^{-6} + ... + e^{-3n} = e^{-3}\frac{1-e^{-3n}}{1-e^{-3}}$ avand limita $\frac{1}{e^3-1}$.

2.a) $a_1 = \int\limits_0^1 \sin \pi x dx$

$a_1 = \frac{2}{\pi}$

b) $\sin \pi x < 1 \Rightarrow a_{n+1} = \int\limits_0^{a_n} \sin \pi t dt < \int_0^{a_n} 1 dt = a_n$

$a_{n+1} = \int_0^{a_n} f(t)dt > 0$

$(a_n)_{n\geq 0}$ descrescator si marginit inferior $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 0}$ convergent

c) $(a_n)_{n\geq 0}$ convergent in x= $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

si obtinem, prin trecere la limita, x=$\int_0^{x} \sin \pi t dt$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g(x)=x-$\int_0^{x}$ sinπtdt, g(0)=0

$g'(x) = 1 - \sin \pi x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ solutie unica

Varianta 80 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1. Al patrulea factor este 0, deci produsul este 0.

2. $f\left(g(x)\right)=1-g(x)=-2x+2$ este descrescătoare.

3. $x\in[-1,1]$.

4. $A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$.

5. $x-2y-6=0$.

6. Ridicăm la pătrat $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-\sin 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin 2x=\frac{3}{4}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $m(\sigma)=4$.

b) Prin calcul direct rezultă $\sigma^5=e$, deci $A=\left\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4\right\}$. A are 5 elemente.

c) $m(\sigma)=4\Rightarrow\varepsilon(\sigma)=+1\Rightarrow\ \varepsilon\left(\sigma^n\right)=(+1)^n=+1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

2.a) Trebuie demonstrat că $f(x-T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $f(x-T)=f\left((x-T)+T\right)=f(x)\Rightarrow -T\in H$.

b) Fie $T_1,T_2\in H\Rightarrow f\left(x+(T_1+T_2)\right)=f\left((x+T_1)+T_2\right)\overset{T_2\in H}{=}f(x+T_1)\overset{T_1\in H}{=}f(x)$, deci $T_1+T_2\in H$.

Dacă $T\in H$, atunci $-T\in H$, deci H este subgrup al lui $(\mathbb{R},+)$.

c) $\mathbb{Q}\subset H$ deoarece pentru orice $T\in\mathbb{Q}$ rezultă $x+T\in\mathbb{Q}$ dacă $x\in\mathbb{Q}$ și $x+T\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deci $f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Dacă $T\in H$, atunci presupunând $T\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, rezultă $x_0=1-T\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $0=f(x_0)\neq f(x_0+T)=1$, contradicție; așadar $T\in\mathbb{Q}$, deci $H\subset\mathbb{Q}$.

În concluzie, $H=\mathbb{Q}$.

Varianta 80 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) > 0,\ x>0$, $f'(x)<0$ pentru $x<0$

f strict descrescatoare pe $(-\infty;0]$ si strict crescatoare pe $[0;\infty)$

b) $\sqrt{x^2+1}f'(x) = x$

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'(x) + \sqrt{x^2+1}f''(x) = 1$

$(x^2+1)f''(x) + xf'(x) = \sqrt{x^2+1}$

c) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$

$n = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x) = 0$

$y = -x$ asimptota oblica spre $-\infty$

2.a) $I_1 = \int_0^1 \dfrac{x}{x+1}dx = \int_0^1 (1 - \dfrac{1}{x+1})dx$

$= (x - \ln(x+1))\,|_0^1$

$= 1 - \ln 2$

b) $I_n = \int_0^1 x\dfrac{nx^{n-1}}{x^n+1}dx = \int_0^1 x\left(\ln\left(x^n+1\right)\right)'dx$

$= \ln 2 - \int_0^1 \ln\left(x^n+1\right)dx$

c) $\ln(1+t) \le t,\ \forall t \ge 0$

$0 \le \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)dx < \int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$

$deci\ \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)dx = 0,$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \ln 2$

$deci\ \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)dx = 0,$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \ln 2$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. 8.

2. $1=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4-4m \Rightarrow m=\frac{3}{4}$.

3. $x=0$.

4. 2^{15}.

5. $a=-3$.

6. $\sin 2a+\sin 2b=2\sin(a+b)\cos(a-b)=2\sin\frac{\pi}{2}\cos(a-b)=2\cos(a-b)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Folosind regula lui Sarrus sau proprietățile determinaților, rezultă $\det A=m+\hat{1}$.

b) Se verifică pe rând cele 3 ecuații ale sistemului.

c) Dacă $m=\hat{6}$, atunci sistemul admite soluțiile $(\hat{6}+\hat{4}\alpha,\alpha,\hat{2})$, unde $\alpha\in\mathbb{Z}_7$.

2.a) $f(1+i)=4i-2+ai+a+b=a+b-2+(4+a)i=0$, deci $a=-4, b=6$.

b) $f(1-\sqrt{2})=10-7\sqrt{2}+a-a\sqrt{2}+b=10+a+b-(7+a)\sqrt{2}=0$, deci $a=-7, b=-3$.

c) Fie x_0 rădăcina triplă; atunci $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=0$. Obținem $x_0=-\frac{1}{3},\ a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{27}$.

Varianta 81 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Solutie

1.a) **Formula**

$f(1)=0 \qquad f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{x^2+x-1}{x^2} \qquad f'(1)=\dfrac{1}{e}$

$y=\dfrac{1}{e}(x-1)$

b) $f'(x)=0 \qquad x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ **punct de maxim local**

$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **punct de minim local**

c) $m=\lim\dfrac{f(x)}{x}=1$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{-\frac{1}{x}}-1)-e^{-\frac{1}{x}}=-2$

$y=x-2$ **asimptota oblica spre** $+\infty$

2.a) $f_1(1)=\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}dt$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1 (t^2+1)'\sqrt{t^2+1}dt$

$=\dfrac{1}{3}(t^2+1)\sqrt{t^2+1}\,|_0^1=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

b) $f_n'(x)=x^n\sqrt{x^2+1} \qquad \forall x\in[0,+\infty)$

$f_n'(x)\ge 0 \qquad \forall x\ge 0$

f_n **strict crescatoare** $\forall x\in[0,+\infty)$

c) $L=\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x t^n\sqrt{t^2+1}dx\ge\int_0^x t^n dx=\infty$

Cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$ **si aplicand L'Hopital, obtinem** $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n\sqrt{x^2+1}}{(n+2)x^{n+1}}, L=\dfrac{1}{n+2}$

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $(1+i)^4=(2i)^2=-4,$ deci este rădăcină a ecuaţiei $z^4+4=0.$

2. $x_V=2, y_V=5,$ deci $x+y=7.$

3. $f(1), f(2), f(3)$ sunt distincte, deci sunt 4,5,6 -- eventual permutate. Suma este $4+5+6=15.$

4. M are 90 de elemente, cifre impare sunt 5, iar numere cu cifre impare 25. Probabilitatea e $\frac{25}{90}=\frac{5}{18}.$

5. $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+2\vec{j},\ \overrightarrow{AC}=-2\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6.$

6. $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=\frac{11}{16}.$

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie

1.a) Cu regula lui Sarrus sau prin aplicarea proprietăţilor determinaţilor rezultă $\det A=0$.
b) Cum $\det A=0$, sistemul admite soluţii nenule.
c) Scăzând prima ecuaţie a sistemului din a doua, rezultă $(b-a)(y_0-z_0)=0$, deci $y_0=z_0$. Rangul matricei sistemului este egal cu 2; z este necunoscută secundară, $z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Obţinem $y=\lambda,\ x=-(a+b+c)\lambda$. Cum $(1,1,1)$ soluţie implică $a+b+c=-1$, soluţiile sistemului sunt $(\lambda,\lambda,\lambda)\ \lambda\in\mathbb{R}$.

2.a) Notând $A_{x,y}=\begin{pmatrix} x & iy\\ iy & x\end{pmatrix}\Rightarrow A_{x_1,y_1}\cdot A_{x_2,y_2}=\begin{pmatrix} x_1x_2-y_1y_2 & \mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)\\ \mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) & x_1x_2-y_1y_2\end{pmatrix}$. În plus,

$(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\neq 0\Rightarrow A_{x_1,y_1}\cdot A_{x_2,y_2}\in G$

b) Comutativitatea este consecinţă a punctului **a**), iar asociativitatea este proprietate generală a înmulţirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elementul neutru este matricea $A_{1,0}=I_2$, iar inversa matricei $A_{x,y}$ este $A_{x',y'}=\begin{pmatrix} x' & iy'\\ iy' & x'\end{pmatrix}$,

cu $x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ şi $y'=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

c) Evident φ este funcţie bijectivă.

φ morfism: $\varphi(x_1+iy_1)\cdot\varphi(x_2+iy_2)=\begin{pmatrix} x_1 & iy_1\\ iy_1 & x_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_2 & iy_2\\ iy_2 & x_2\end{pmatrix}=A_{x_1,y_1}\cdot A_{x_2,y_2}=A_{x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1}$. Concluzia rezultă din faptul că $(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$.

Varianta 82 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $a_1 > a_0$

Presupunem ca $a_{k+1} > a_k \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$

$(a_n)_{n\geq 1}$ crescator

b) $a_0 < 2,\ a_k < 2 \Rightarrow a_{k+1} < 2$

$(a_n)_{n\geq 1}$ marginit superior

$(a_n)_{n\geq 1}$ convergent

c) $l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos \pi x}{x^2} = \dfrac{\pi^2}{2}$

2.a) $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg^2 t + tgt)dt$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} ((tgt)' + tgt - 1)dt$

$= 1 - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$

b) $f'(x) = \dfrac{(\sin x + \cos x)\sin x}{\cos^2 x},\ \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescatoare

c) $\alpha \geq 0,$ cazul $\dfrac{0}{0}$

Aplicand l'Hopital, $l = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{(\sin x + \cos x)\sin x}{2x\cos^2 x}$

$l = \dfrac{1}{2}$

Varianta 83 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1. $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow 8 < 9;\ \sqrt[3]{3} < 2 = \log_2 4 < \log_2 5.$

2. $\Delta = 9 - 4m \le 0 \Rightarrow m \ge \frac{9}{4}.$

3. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2} + k\pi = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4. Sunt 7 pătrate. Probabilitatea este $\frac{7}{49} = \frac{1}{7}.$

5. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$

6. $P = \mathrm{tg}1^\circ \cdot \mathrm{tg}2^\circ \cdot \mathrm{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}89^\circ = (\mathrm{tg}1^\circ \cdot \mathrm{tg}89^\circ)\cdot(\mathrm{tg}2^\circ \cdot \mathrm{tg}88^\circ)\cdot\ldots\cdot(\mathrm{tg}44^\circ \cdot \mathrm{tg}46^\circ)\cdot \mathrm{tg}45^\circ = 1.$

Soluție

1.a) Notând cu A matricea sistemului, rezultă $\det A = m^2(m-1).$ Sistemul admite soluție unică dacă și numai dacă $\det A \ne 0,$ adică $m \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$

b) Dacă $m = 0$ rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, rang $A = 1$ și rang $\overline{A} = 2.$

Pentru $m = 1$ rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, rang $A = 2$ și rang $\overline{A} = 3.$

c) Fie $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ o soluție a sistemului; atunci $m \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$ Scăzând a doua ecuație a sistemului din a treia, rezultă că $x_0 - y_0 + (m+1)z_0 = 1.$ Din prima ecuație, conduce la $mz_0 = 0$ deci $z_0 = 0.$ Rezultă $x_0 - y_0 = 1,$ deci $x_0 - y_0 + 2008z_0 = 1.$

2.a) $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$

b) Din tabla adunării elementelor din H, rezultă că dacă $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$ atunci $x = y = \hat{0}.$

c) Se verifică relația $A\cdot B \in G$ pentru orice $A, B \in G$. Asociativitatea este proprietate generală a înmulțirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$. Elementul neutru este $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, iar dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, condiția $a \ne \hat{0}$ sau $b \ne \hat{0}$ este echivalentă cu $\det A \ne \hat{0}$. Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, cu $c = (\det A)^{-1}\cdot a,$ $d = (\det A)^{-1}\cdot(-b).$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Solutie

1a). Cu x=$\frac{\pi}{2}-y$ obtinem I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx = J$ $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ deci dreapta de ecuatie $x=1$ este asimptota verticala la graficul functiei

b) $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$n = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) = 1$

$y = x+1$ asimptota oblica spre $+\infty$

c) $f'(x) = \frac{x^2-x-1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$, x $\in$ (-∞;-1) $\cup$ (1;∞)

$f'(x) = \frac{-x^2-x+1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$, x $\in$ (-1;1), f derivabila pe $\mathbb{R}\setminus\{1;-1\}$

2a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\, dx = 2$

b) $F'(x) = f_4(x)$

$F''(x) = 4\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) f_4^2(x)$

$F''(x) = f_4^2(x)\sin 4x$

c) Cu x=$\frac{\pi}{2}-y$ obtinem I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx = J$

$I + J = \frac{\pi}{2}$

$I = J = \frac{\pi}{4}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Avem $3\left(z+\overline{z}\right)\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R},$ deci $z=3z+3\overline{z}-\left(2z+3\overline{z}\right)\in\mathbb{R}.$

2. $f\left(x\right)=-\frac{9}{2}x^2-\frac{3}{2}x+4.$

3. Ecuația $f\left(x\right)=y,y\in\left(1,3\right)\Rightarrow x=\frac{3-y}{y-1}\in\left(0,\infty\right)$ are soluție unică.

4. $n=8.$

5. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}.$

6. $\cos a=\cos\left(b+\pi\right)=-\cos a,$ deci $\cos a\cdot\cos b=-\cos^2 a\le 0.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Se înlocuiesc $x_0=2,\ y_0=2,\ z_0=1$ în ecuațiile sistemului și se obține $m=3$ și $n=2$.
b) Sistemul admite soluție unică dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Cum $\det A=3-n$, rezultă $n\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
c) Dacă $n\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, sistemul este compatibil determinat. Dar sistemul este compatibil nedeterminat; ca urmare, $n=3$. Rangul matricei sistemului este 2 și deoarece sistemul este compatibil, rangul matricei extinse trebuie să fie 2. Obținem $m=1$.
2. a) Fiecare matrice din *G* este determinată de o pereche $(a,b)\in\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$, deci *G* are 9 elemente.

b) Înmulțirea este corect definită pe *G*: $\begin{pmatrix}\hat{1} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{1} & c & d\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & a+c & b+d\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in G$

Înmulțirea matricelor este asociativă pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$, deci și pe *G*. Elementul neutru este I_3, iar inversa matricei $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in G$ este $A^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{1} & -a & -b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

c) Dacă $X=\begin{pmatrix}\hat{1} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$, $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & a+a & b+b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ și $X^3=\begin{pmatrix}\hat{1} & a+a+a & b+b+b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=I_3$.

Varianta 84 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie

1.a) $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

f strict descrescatoare pe $(-\infty,0)$ si strict crescatoare pe $(0,\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$ nu avem asimptota spre $+\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ $\quad$ y=0 asimptota orizontala spre $-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$ $\quad$ x=0 asimptota verticala

c) $f(n+1)-f(n)=\dfrac{e^c(c-1)}{c^2},\quad c\in(n,n+1)$

$\dfrac{n^2e^n(n-1)}{(n+1)^2}<n^2(f(n+1)-f(n))<e^{n+1}n^2$

$\lim n^2(f(n)-f(n+1)=-\infty$

2.a) $f(1)=\int_0^1 e^{-t}(t^2-3t+2)dt$

$L=-5\ f(1)>\int\limits_0^1 e^{-t}dt=1-\dfrac{1}{e}>0$

b) $f'(x)=e^{-x}(x^2-3x+2)$

Tabelul de variatie

x=1 punct de maxim local si x=2 punct de minim local

c) $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x^2}=(\dfrac{0}{0})=$

$L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(-x)}{2x}$

$L=-5$

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Fie $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$. Avem $i\left(z - \overline{z}\right) = i\left(a + bi - a + bi\right) = -2b \in \mathbb{R}$.

2. $\Delta = (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$.

3. $x = 3$ este unica soluție.

4. $C_7^k \cdot 2^k, k = 1, 2, ..6$ se divid cu 2 si 7, deci cu 14; iar primul si ultimul termen nu. Sunt 6 termeni.

5. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2.$

6. $\sin 2a - \sin 2b = 2\sin\left(a-b\right)\cos\left(a+b\right) = 2\sin\left(a-b\right)\cos\frac{3\pi}{2} = 0.$

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\det A = -5m$

b) Sistemul admite soluții nenule dacă determinantul matricei sistemului este nul, deci $m = 0$

c) Pentru $m = 0$ sistemul are soluții nebanale: $x = \lambda,\ y = 3\lambda,\ z = -5\lambda,$ unde $\lambda \in \mathbb{R}$. Înlocuind, rezultă $\frac{z_0^2 + y_0^2 + x_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2} = \frac{7}{3}.$

2.a) $f\left(i\right) = b - 5 + i\left(a+4\right) = 0,$ de unde $a = -4, b = 5.$

b) $\left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 + \left(x_3 - 1\right)^2 + \left(x_4 - 1\right)^2 = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{4} x_k + 4 = \left(\sum_{k=1}^{4} x_k\right)^2 - 2\sum_{k \neq j} x_k x_j - 2\sum_{k=1}^{4} x_k + 4 = 0$

c) Dacă polinomul are toate rădăcinile reale, ținând cont de relația obținută la punctul anterior, rezultă $\left(x_1 - 1\right)^2 = \left(x_2 - 1\right)^2 = \left(x_3 - 1\right)^2 = \left(x_4 - 1\right)^2 = 0,$ deci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Obținem $a = -4, b = 1.$

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1,\quad$ y=1 asimptota orizontala spre $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1,\quad$ y=1 asimptota orizontala spre $-\infty$

$\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=+\infty\quad$ x=0 asimptota verticala

b)

$f''(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$,deci x=-0,5 este punct de inflexiune

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}x^2\left(e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}\dfrac{-x^2}{x(x+1)}\dfrac{e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1}{-\frac{1}{x(x+1)}}=-1$

2.a) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx$

$=tgx\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$

b) $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\Rightarrow tgx\in[0;1]\quad \mathrm{tg}^{2n}x>tg^{2n+2}x\Rightarrow I_{n+1}<I_n$

$I_n>0$

$(I_n)_{n\geq 1}$ marginit inferior $\Rightarrow (I_n)$ convergent

c) $I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+2}x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[tg^n x(tg^2x+1)-tg^n x\right]dx$

$=\dfrac{tg^{n+1}x}{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n\quad ;I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$

Daca $I_n\to l\Rightarrow 2l=0\Rightarrow l=0$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Prin calcul obținem $-\frac{8}{5}$.

2. Avem $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2}{ab}-2=\frac{21}{2}$.

3. $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Sunt 4 elemente în A și 3 multiplii de 7.

5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$, deci modulul este $2AC=6\sqrt{5}$.

6.

$$\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+\ldots+\cos 179^\circ=\left(\cos 1^\circ+\cos 179^\circ\right)+\left(\cos 2^\circ+\cos 178^\circ\right)+\ldots+\left(\cos 89^\circ+\cos 91^\circ\right)+\cos 90^\circ=0$$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Determinantul matricei sistemului este $\Delta=ab(b-a)(a-1)(b-1)$.

b) Sistemul este compatibil determinat dacă $\Delta\neq 0$. Rezultă $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $a\neq b$.

c) Evident $\operatorname{rang} A\leq \operatorname{rang}\overline{A}$

Coloana termenilor liberi este aceeași cu a treia coloană a matricei sistemului, deci orice minor al matricei extinse este și minor al matricei sistemului. Ca urmare, $\operatorname{rang}\overline{A}\leq \operatorname{rang} A$, deci $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}$, adică sistemul este compatibil.

2.a) $f^2=\left(\hat{2}X+\hat{1}\right)^2=\hat{1}$, polinom care are gradul 0.

b) Cum $f\cdot f=\hat{1}$, f este element inversabil al inelului $\left(\mathbb{Z}_4[X],+,\cdot\right)$ și $f^{-1}=f$.

c) Fie $g\in\mathbb{Z}_4[X]$, $g=ax+b$, $a\neq\hat{0}$, astfel încât $g^2=\hat{1}$.. Rezultă $\begin{cases}a^2=\hat{0}\\ \hat{2}ab=\hat{0}\\ b^2=\hat{1}\end{cases}$. Obținem $b=\hat{1}$ sau $b=\hat{3}$ și $a=\hat{2}$. Obținem două polinoame cu proprietatea cerută în enunț: $g_1=\hat{2}X+\hat{1}$ și $g_2=\hat{2}X+\hat{3}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$ $f'(0)=0$, f(0)=-1 y+1=0

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, y=1 asimptota orizontala spre $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, y=1 asimptota orizontala spre $-\infty$

$\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=+\infty$, x=-1 asimptota verticala

c) $\dfrac{\mathrm{k}^3-1}{k^3+1}=\dfrac{(k-1)\big(k(k+1)+1\big)}{(k+1)\big(k(k-1)+1\big)}$

$\dfrac{3}{2}f(2)f(3)...f(n)=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{n^2}=e$

2.a) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$ $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I_2=\dfrac{\pi}{4}$

b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

de unde rezulta relatia

c) $\sin x\le x, \forall x\ge 0$, de unde avem $0\le\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x dx\le\int_0^{\frac{\pi}{3}}x^n dx=\dfrac{\pi}{3(n+1)}$,

deci limita cautata este 0.

Varianta 87 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $1+z+z^2=\frac{1-z^3}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0.$

2. $x\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}.$

3. Observăm că $\forall y\in(2,\infty),\ \exists!\ x\in(1,\infty), x=\sqrt{y+1}$ astfel ca $f(x)=y.$

4. Avem 4 numere divizibile cu 24, anume 24, 48, 72, 96.

5. $\frac{a}{3}=\frac{a+1}{5}\Rightarrow a=\frac{3}{2}.$

6. Semiperimetrul şi aria sunt $p=\frac{15}{2},\ S=\frac{15\sqrt{3}}{4}\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie

1.a) Calcul direct

b) $A^3=9A\Rightarrow I_3+A^3=\begin{pmatrix}10&9&9\\9&10&9\\9&9&10\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(I_3+A^3\right)=28.$

c) Fie $B=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}a_1+b_1+c_1&a_2+b_2+c_2&a_3+b_3+c_3\\a_1+b_1+c_1&a_2+b_2+c_2&a_3+b_3+c_3\\a_1+b_1+c_1&a_2+b_2+c_2&a_3+b_3+c_3\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3&a_1+a_2+a_3&a_1+a_2+a_3\\b_1+b_2+b_3&b_1+b_2+b_3&b_1+b_2+b_3\\c_1+c_2+c_3&c_1+c_2+c_3&c_1+c_2+c_3\end{pmatrix}$. Egalând elementele aflate pe poziţii corespondente, obţinem concluzia.

2.a) $\hat{1}+\hat{2}+...+\widehat{20}=\left(\hat{1}+\widehat{20}\right)+\left(\hat{2}+\widehat{19}\right)+...+\left(\widehat{10}+\widehat{11}\right)=\hat{0}.$

b) $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot...\cdot\widehat{20}=\hat{3}\cdot\hat{7}\cdot\left(\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{4}\cdot\hat{5}\cdot\hat{6}\cdot\hat{8}\cdot...\cdot\widehat{20}\right)=\hat{0}.$

c) $21=3\cdot7\Rightarrow\varphi(21)=21\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=12$, deci numărul elementelor inversabile ale inelului $\mathbb{Z}_{21}$ este 12.

Numărul elementelor neinversabile din $\mathbb{Z}_{21}$ este $21-12=9$.

Varianta 87 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f'(x) = a^x \ln a - ax^{a-1}$

$f'(1) = a(\ln a - 1)$

b) $f'(a) = a^a(\ln a - 1)$

$f(a) = 0$

$y = a^a(\ln a - 1)(x - a)$

c) $f(x) \geq 0 = f(a)$

$\Rightarrow$ conform Fermat(f derivabila), f$'$(a)=0 $\Rightarrow$ a=e

g(x)=$\mathrm{e^x} - x^e \geq 0,\ \forall$x>0

2.a) $I_1 = \int_1^e \ln x dx$

$= x \ln x |_1^e - \int_1^e 1dx$

$= e - e + 1 = 1$

b) $I_n = \int_1^e x' \ln^n x dx = x \ln^n x |_1^e - n\int_1^e \ln^{n-1} x$

$= e - nI_{n-1}$

c) $\ln x \in [0;1] \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

$I_n > 0$

$(I_n)_{n\geq 1}$ descrescator si marginit $\Rightarrow (I_n)_{n\geq 1}$ convergent

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $i - i = 0$.

2. $[-1,5]$.

3. $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos x = \frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, care verifică.

4. Probabilitatea este $\frac{5!}{5^5} = \frac{24}{625}$.

5. $G(0,2)$.

6. Avem $\cos a = \frac{3}{5}$ și $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1}{2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + A^t = \begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 + a_2 \\ b_1 + a_2 & 2b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\operatorname{Tr}\left(A + A^t\right) = 2(a_1 + b_2) = 2\operatorname{Tr}(A)$

b) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2^2 + b_2^2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Tr}\left(A \cdot A^t\right) = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 0$ dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow A = 0_2$.

c) Suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2$.

$S = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 0$, de unde obținem că $\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 \\ b_1 + b_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

2. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 7I_2$, deci $A^2 \in K$ (pentru $a = 7, b = 0$)

b) Fie $X = aI_2 + bA, Y = cI_2 + dA$; atunci $XY = (ac + 7bd)I_2 + (ad + bc)A \Rightarrow XY \in K$

c) Fie $X = aI_2 + bA, Y = cI_2 + dA$, $X \neq O_2$, astfel încât $XY = I_2$. Vom demonstra că $\det X = a^2 - 7b^2 \neq 0$.

Presupunând contrariul, ar rezulta că există $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a^2 = 7b^2$. Dacă $b \neq 0$, atunci $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 7$, absurd, deoarece 7 nu este pătratul niciunui număr rațional. Ca urmare, $b = 0$, deci și $a = 0$, adică $X = O_2$, contradicție.

Din $XY = I_2$ rezultă $\begin{cases} ac + 7bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{a}{a^2 - 7b^2} \in \mathbb{Q} \\ d = -\frac{b}{a^2 - 7b^2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$, deci $Y = \frac{1}{a^2 - 7b^2} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$.

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $f(1)=\frac{\pi}{4},\quad f'(1)=\frac{1}{2}$

$y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}$

c) $g(1)=g(0), deci\ exista\ c\in(0;1)\ astfel\ incat\ g'(c)=0$

$g''(x)>0, g'\ \ strict\ crescatoare, deci\ c\ este\ unic$

$c\ punct\ de\ extrem$

2.a) $I_1=\int_0^1 x^2\sin x=x^2(-\cos x)\Big|_0^1+2\int_0^1 x(\sin x)'\,dx$

$=-\cos 1+2x\sin x|_0^1-2\int_0^1\sin x$

$=-\cos 1+2\sin 1+2\cos 1-2=2\sin 1+\cos 1-2$

b) $x^{2n}>x^{2n+2}\Rightarrow I_n>I_{n+1}$

$\sin x>0\Rightarrow I_n>0$

$(I_n)_{n\geq 1}$ descrescator si marginit $\Rightarrow (I_n)_{n\geq 1}$ convergent

c) $I_n=\int_0^1 x^{2n}(-\cos x)'dx=-x^{2n}\cos x\ |_0^1\ +2n\int_0^1 x^{2n-1}(\sin x)'$

$=-\cos 1+2nx^{2n-1}\sin x\ |_0^1\ -2n(2n-1)I_{n-1}=$

$=2n\sin 1-\cos 1-2n(2n-1)I_{n-1}$

Varianta 89 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1. $z = -\frac{3}{7}i.$

2. $x = 5$ şi $x = -1.$

3. Ecuația $f(x) = y \Leftrightarrow 4yx^2 - x + y = 0$ are soluții reale dacă şi numai dacă $y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$

4. Sunt $A_4^3 = 24$ de funcții strict crescătoare şi tot 24 strict descrescătoare. În total sunt 48 de funcții strict monotone.

5. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, evident.

6. $\sin 2a - \sin 2b = 2\sin(a-b)\cos(a+b) = \sin(a-b)$, de unde cerința

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) Fie A matricea sistemului: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 3$

Avem $\operatorname{rang}\overline{A} = 3 = \operatorname{rang} A$, deci sistemul este compatibil

b) Rezolvând sistemul obținem: $x_1 = \frac{1+a-b-2\lambda}{2},\ x_2 = \frac{1-a-b-2\lambda}{2},\ x_3 = b+\lambda,\ x_4 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Punând condițiile ca x_1, x_2, x_3, x_4 şi $x_1 + x_2$ să fie în progresie aritmetică, rezultă $a = b = -\frac{1}{18}$

c) Din $x_4 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$. Apoi, $x_2 > 0 \Rightarrow 1 - a - b - 2\lambda > 0$, deci $1 - a - b > 2\lambda > 0 \Rightarrow a + b < 1$

2. a) $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = 1 - (x_1+x_2+x_3) + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3 = 4.$

b) Presupunând că f are o rădăcină întreagă a, atunci a este divizor al termenului liber al polinomului, adică $a \in \{-1, 1\}$. Cum nici 1, nici -1 nu este rădăcină a lui f, rezultă că f nu are rădăcini întregi.

c) $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 = (x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - (x_1^3+x_2^3+x_3^3).$

Avem $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -1$.

Avem $x_k^3 - 3x_k^2 + 5x_k + 1 = 0,\ k = 1,2,3$ şi adunând, rezultă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -21.$

În concluzie, $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 = 18.$

Varianta 89 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a $f_a^{'}(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+a}{x(x+1)}$

b $f_a^{''}(x)=\frac{x(2a-1)+a}{x^2\left(x+1\right)^2}$

f convexa pe $(0;\infty)$daca si numai daca $f^{''}(x)\geq 0,\forall x>0 \Leftrightarrow$

$2a-1\geq 0$ si $\frac{a}{2a-1}>0$,de unde $a\in\left[\frac{1}{2};\infty\right]$

c $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\cdot 0$

$L=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+1\right)-\ln x}{\frac{1}{x+a}}=\frac{\infty}{\infty}$

$L=1$ folosind regula lui l'Hopital

2.a $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$\frac{I_n}{I_{n+1}}<\frac{n+1}{n}$ $I_2=\frac{\pi}{4}$

b $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\left(\sin x\right)'dx=\left(n-1\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^2 xdx$

$=\left(n-1\right)I_{n-2}-\left(n-1\right)I_n$,de unde

$nI_n=\left(n-1\right)I_{n-2}$

c $\cos x\in\left[0;1\right]$,de unde $I_{n+1}<I_n$;in plus $I_n\geq 0$ $I_n\geq 0$,deci sirul este descrescator si marginit inferior, adica e convergent.

Rezolvare

1. $150 = \frac{2a_1 + 9 \cdot 3}{2} \cdot 10 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}$.

2. Notând $s = a + b, p = ab$ avem $s^2 - 2p = 1, s = 2,$ de unde $s = 2,\ p = 1$ şi $a = b = 1 \Rightarrow (a,b) = (1,1)$.

3. Avem $x \in \left(0, \frac{9}{2}\right)$ iar ecuația se scrie $x(9 - 2x) = 10$. Obținem soluțiile $x = 2$ şi $x = 2,5$.

4. Sunt 100 de numere in multimea M si 14 multiplii cu 7; probabilitatea este $\frac{86}{100} = \frac{43}{50}$.

5. $y = -2x + 2$.

6. Este partea reală a sumei rădăcinilor de ordin 5 ale unității. Alternativ, înmulțim suma cu $\sin\frac{\pi}{5}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\det(A_x) = 1$ şi cum $\det(A_x) \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă.

b) $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 2(x+y) & 5(x+y)^2 - 2(x+y) \\ 0 & 1 & 5(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $A_x \cdot A_y = A_{x+y} \in G$

c) Întrucât $A_0 = I_3$ şi $A_3 \cdot A_{-3} = A_0 = I_3$, deducem că inversa matricei A_3 este A_{-3}.

2.a) Avem relațiile $f(\hat{0}) = g(\hat{0}) = \hat{1},\ f(\hat{1}) = g(\hat{1}) = \hat{0}$ şi $f(\hat{2}) = g(\hat{2}) = \hat{2},$ deci $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}_3$.

b) Singura rădăcină a lui f este $\hat{1}$.

c) Cum $\hat{1}$ este rădăcină, $X - \hat{1}$ divide pe f, deci $f = (X - \hat{1})(X^2 + X + \hat{2}) = (X + \hat{2})(X^2 + X + \hat{2})$. Polinomul $g = X^2 + X + \hat{2}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$, deci este ireductibil (presupunând că g s-ar descompune în produsul a două polinoame de gradul 1, ar rezulta că g are rădăcini).

Varianta 90 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Solutie

1a). $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(x+\ln x\right)=-\infty$,deci x=0 este asimptota verticala;

$\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$,deci nu avem asimptota orizontala;

m=1 dar n nu este finit,deci nu avem asimptota oblica

b) $g_n\left(x\right)=x^n+x^{-n}$, $g_n''\left(x\right)=n\left(n-1\right)x^{n-2}+n(n+1)x^{-n-2}>0,\forall x>0$,deci functiile sunt convexe

c) sirul $(x_n)_n$ este crescator si marginit superior de 2,deci convergent

si scriind relatia $\left(\frac{x_n}{2}\right)^n+\frac{\ln x}{2^n}=1$ rezulta ca singura limita posibila este 2.

2a) $I_2=\int_0^x\frac{t^2}{t+1}dt=\int_0^x\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt==\frac{x^2}{2}-x+\ln\left(x+1\right)$

b) $I_n+I_{n-1}=\int_0^x\frac{t^n+t^{n-1}}{t+1}dt=\int_0^x t^{n-1}dt=\frac{t^n}{n}\Big|_0^x=\frac{x^n}{n}$

c) $\frac{t^n}{t+1}<t^n,\forall t\in\left[0;x\right]$

$0<I_n<\int_0^x t^n dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}\to 0,\forall x\in\left[0;1\right]$

de unde rezulta $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $|z| = \left|\sqrt{2} - 1 + i\left(\sqrt{2} + 1\right)\right|^2 = 6.$

2. $(1-2y)^2 - 6y^2 = 1 \Rightarrow -4y - 2y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ sau $y = -2.$ Obținem $x = 1, y = 0$ și $x = 5, y = -2.$

3. De exemplu, $f(0) = 1 = f(-1).$

4. $C_{10}^3 - C_9^3 = C_9^2 = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$

5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB},$ deci $AC = BD,$ de unde cerința.

6. $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $A^2 = 5A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2x & 10 \\ 5x & 2x+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5x & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2.$

b) Pentru $x = 2$, conform punctului anterior, rezultă $A^2 = 5A.$ Prin inducție, rezultă $A^n = 5^{n-1}A,$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*,$ de unde $A^{2008} = 5^{2007}A.$

c) $A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & x+2 \\ x+2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}\left(A + A^t\right) = 1$ dacă și numai dacă $\det\left(A + A^t\right) = 0,$ adică $x \in \{-6, 2\}.$

2.a) $f(-1) = a^2 - 2a + 7 = 10 \Rightarrow a \in \{-1, 3\}.$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j$. Cum $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 - a$ și $\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = \dfrac{a^2 + 3}{2}$,

rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -2a - 2$

c) Avem $\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} \left(x_i - x_j\right)^2 = 3\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i^{\ 2} - 2\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = -a^2 - 6a - 9$. Dacă f are toate rădăcinile reale

$\Rightarrow \sum\limits_{1 \le i < j \le 4} \left(x_i - x_j\right)^2 \ge 0 \Rightarrow -a^2 - 6a - 9 \ge 0 \Rightarrow a = -3$.

Egalitatea are loc dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \dfrac{1-a}{4} = 1$. În final, $a = -3, b = -8, c = 2$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Solutie

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2=m$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=0=n$

$y=2x$ asimptota oblica spre ∞

b) $f'(x)=\dfrac{2x^4+6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ *deci f strict crescatoare adica injectiva*

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, f *continua* $\Rightarrow f$ *surjectiva*

f bijectiva,deci f inversabila

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(e^x\right)\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln f\left(e^x\right)}{x}}=e^{\frac{3x\ln 2-2x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{x}}=8e^{-2}$

2a) $F'(x)=e^{\sin^2 x}>0$

de unde F este strict crescatoare

b) F este functie Rolle pe [0;x],deci, conform teoremei lui Lagrange,

$\exists c_x\in(0;x)$ *astfel incat* $\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(c_x)$

Adica $F(x)=xf(c_x)$

c) Cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$

Conform teoremei l'Hopital, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Fie q rația progresiei. Avem $a\left(q^3-1\right)=7,\ aq(q-1)=2$, de unde $q=2$.

2. $mx^2+x-2\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m<0 \text{ și } \Delta=1+8m\le 0.$ Rezultă $m\le -\frac{1}{8}.$

3.
$$2x+\frac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{12}-(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cap(0,5)=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

4. $n=C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8=C_{10}^0+\left(C_{10}^2-C_{10}^8\right)-\left(C_{10}^6-C_{10}^4\right)=1-0-0=1.$

5. $0=\vec{u}\cdot\vec{v}=a^2-1+2a+2\Rightarrow a=1.$

6. $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\sin 2\alpha=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $A\cdot(X+Y)\cdot A^t=A\cdot X\cdot A^t+A\cdot Y\cdot A^t=0_2\Rightarrow X+Y\in G$

b) Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G$; atunci $A\cdot X\cdot A^t=(a+b+c+d)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$A\cdot X\cdot A^t=0_2\Rightarrow a+b+c+d=0$

c) $\det X=0\Rightarrow X^2=tX$, unde $t=\mathrm{Tr}(A)$. Prin inducție rezultă $X^n=t^{n-1}X$, pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\ge 1$

Atunci $A\cdot X^n\cdot A^t=t^{n-1}\left(A\cdot X\cdot A^t\right)=0_2\Rightarrow X^n\in G$.

2. a) Prin împărțire se obține câtul X^2-4X+5 și restul 0.

b) $f=\left(X^2-2X+5\right)\left(X^2-4X+5\right)$. Rădăcinile polinomului sunt $x_{1,2}=1\pm 2i,\ x_{3,4}=2\pm i$, niciuna nefiind reală.

c) Prin calcul direct rezultă $|x_k|=\sqrt{5},\ k=1,2,3,4.$

Varianta 92 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Solutie

1.a $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ $\quad f'(e)=\dfrac{1}{e}$

$f(e)=0$, $\quad y=\dfrac{1}{e}(x-e)$

b) $f''(x)=-\dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}<0,\forall x>1$**,**deci f este concave

c) Conform teoremei lui Lagrange exista $c_x\in(x,x+1)$ $\;a.i.\; f(x+1)-f(x)=f'(c_x)=\dfrac{1}{c_x\ln c_x}$

avem de calculat $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{c_x\ln c_x}$ dar cum $\dfrac{x\ln x}{(x+1)\ln(x+1)}<\dfrac{x\ln x}{c_x\ln c_x}<1$ limita cautata este 1.

2a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=arctg(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

b) Fie F o primitiva a lui f

$\Rightarrow F'(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}\geq 0,(\forall)x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ F strict crescatoare pe $[0,\infty)$

c) cu substitutia $\quad x=2\pi-y\;\; obtinem\;\; I=\displaystyle\int_0^{2\pi}(2\pi-y)f(y)\,dy=2\pi\int_0^{2\pi}f(y)\,dy-I$

de unde I=0.

Varianta 93 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1. $z = 1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow |z| = 2.$

2. $f(x) = ax + b,\ a > 0 \Rightarrow f(f(x)) = a^2x + ab + b \Rightarrow a = 2,\ b = 1.$

3. $x = 2.$

4. $\frac{11}{1000}.$

5. Dreapta AB are ecuatia $x - y + 1 = 0.$ Distanta este $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

6. Avem $\sin\alpha = 0$ sau $\cos\alpha = 1,$ deci $x = \pi.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Prin calcul direct rezultă $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A \cdot A^t\right)^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$ Cum $X^3 = AX = XA,$ rezultă $a = d$ și $b = 0.$ Înlocuind apoi $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ în ecuația $X^2 = A,$ rezultă $a^2 = 1$ și $ac = 1.$ Obținem soluțiile $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

2.a) Restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ este $f(-1) = b - 5$

b) Fie $g = f - X$; atunci $X^2 - X \mid g$. Rezultă $g(0) = g(1) = 0$, de unde $a = 0,\ b = 0$

c) $(X - 1)^2 \mid f \Rightarrow f(1) = f'(1) = 0$. Avem $f(1) = 0 \Rightarrow 2a + b + 1 = 0$ și $f'(1) = 0 \Rightarrow 11a - 15 = 0$; obținem $a = \frac{15}{11},\ b = -\frac{41}{11}$

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Solutie

1a) $f_t'(x) = 3x^2 + t^2$

b) $f_t'(x) = 3x^2 + t^2 > \mathbf{0}$ pentru orice x real,deci functia este strict crescatoare

c) $\lim_{x\to\infty} f_t(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} f_t(x) = -\infty, f_t \text{ continua} \Rightarrow f_t \text{ surjectiva}$

cum functia era strict crescatoare,deci injectiva,inseamna ca ea este inversabila

2a) $f(1) = \int_0^1 (t^2+1)\sqrt{t}\,dt = \frac{20}{21}$

b) $f(x) = \frac{2x^3\sqrt{|x|}}{7} + \frac{2x\sqrt{|x|}}{3}, \ deci\ f(-x) = -f(x), adica\ f\ este\ impara$

c)

Conforn teoremei luiLagrange exista $c_x \in (x, x+1)$ $a.i.\ f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = (c_x^2+1)\sqrt{c_x}$

cum $\frac{(x^2+1)\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} < \frac{(c_x^2+1)\sqrt{c_x}}{x^2\sqrt{x}} < \frac{((x+1)^2+1)\sqrt{x+1}}{x^2\sqrt{x}}$ rezulta ca limita cautata este 1.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $(1+i)^4 = -4.$

2. $f(-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x).$

3. $5^x + 5^{-x} = 2 \Leftrightarrow \left(5^x - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$

4. Sunt 4 cifre prime, anume 2,3,5,7, deci sunt 400 de numere cu proprietatea cerută. Probabilitatea este $\frac{2}{5}$.

5. Punctele B,C,O sunt coliniare şi O este mijlocul segmentului BC. Rezultă că BC este diametru al cercului circumscris, deci $A = 90^\circ$.

6. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \text{tg } 2\alpha = 0.$

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluţie

1.a) $X(a)X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a+b)A + abA^2$

Cum $A^2 = O_2$, rezultă $X(a)X(b) = I_2 + (a+b)A = X(a+b)$.

b) $X(a)\cdot X(e) = X(a) \Rightarrow X(a+e) = X(a) \Rightarrow a + e = a \Rightarrow e = 0.$

c) Prin inducţie avem $X(a_1)\cdot X(a_2)\cdot\ldots\cdot X(a_n) = X(a_1 + a_2 + \ldots + a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă $X(2)X(3)\ldots X(2008) = X(1005\cdot 2007)$.

2.a) Pentru $x = -1$ rezultă $f(-1) = f^2(-1) + 3f(-1) + 1$, deci $f(-1) = -1$

b) Restul împărţirii polinomului f la $X - 5$ este $f(5)$

Pentru $x = 0$ rezultă $f(1) = f^2(0) + 3f(0) + 1 = 1$

Pentru $x = 1$ rezultă $f(5) = f^2(1) + 3f(1) + 1 = 5$

c) Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 0$ *şi* $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1, \forall n \geq 0$

Prin inducţie rezultă $f(a_n) = a_n$ şi $a_n < a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$

Polinomul $h = f - X$ se anulează de o infinitate de ori, deci $f - X = 0$, adică $f = X$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

f nu admite asimptota spre $+\infty$

b) $f'(x) = 0 \quad (n+1)x^n - (n+2) = 0$

$x_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}} = 1$

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$

$= x\,|_0^1 - arctg(x)\,|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

b) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}dx =$

$= \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1}$

c) $\frac{x^{2n}}{1+x^2} \le x^{2n},\ (\forall)x \in [0,1] \quad \Rightarrow 0 < I_n \le \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1} \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} I_k = 0$

Varianta 95 - rezolvari mate MT1

Rezolvare

1. $0 < \frac{1}{x^2+1} < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x^2+1}\right] = 0.$

2. Ecuația se scrie $1 = (1-x)|1+x|$. Obținem $x = 0$ și $x = -\sqrt{2}.$

3. Funcțiile $g, h : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = a^x, g(x) = \log_a x,$ sunt strict monotone de aceeași monotonie, deci funcția $f = g + h$ este strict monotonă.

4. Sunt cinci cifre impare, anume 1,3,5,7,9, și $A_5^3 = 60$ de numere cu proprietatea cerută. Probabilitatea este $\frac{60}{900} = \frac{1}{15}$.

5. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 3a + a^2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}.$

6. $\sin x + \sin 5x = 2\cos 2x \cdot \sin 3x,$ de unde cerința

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $2A_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

b) $A_3 + xI_3 = \begin{pmatrix} 2+x & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 \\ 1 & 1 & 2+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + xI_3) = (x+4)(x+1)^2$

$\det(A + xI_3) = 0 \Rightarrow x \in \{-4, -1\}$

c) $\det A_4 = 5 \neq 0,$ deci A_4 este inversabilă. Fie $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Prin calcul direct se arată că

$AB = BA = I_4,$ deci $B = A^{-1}.$

Calculul inversei matricei A_4 și obținerea formei cerută în enunț

2.a) $x_2 = 1 + i \Rightarrow x_3 = 1 - i$. Obținem $a = 4, b = 6, c = 4$

b) Presupunem că există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ și $(X-2)^2$ sunt egale cu $r \in \mathbb{R}[X]$, grad $r \leq 1$. Fie $g = f - r$; atunci grad $g = 3$. Atunci $(X-1)^2 \mid g$ și $(X-2)^2 \mid g$

Rezultă $(X-1)^2 (X-2)^2 \mid g \Rightarrow$ grad $g \geq 4$, contradicție

c) Presupunem că $x_1 \leq 0$. Pe rând, rezultă $x_1^3 \leq 0, -ax_1^2 \leq 0, bx_1 \leq 0, -c < 0$. Obținem $0 = f(x_1) < 0,$ contradicție

Varianta 95 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluție

1.a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$

$y=\frac{\pi}{2}$ asimptota orizontala spre $+\infty$

b $g'(x)=f'(x+1)-f'(x)-f'\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)'$

$g'(x)=0$

g derivabila pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ g(const)=g(0)=0 $\forall$x

c $arctg\,\frac{1}{k^2+k+1}=arctg(k+1)-arctgk$

$\sum\limits_{k=1}^{n} arctg\,\frac{1}{k^2+k+1}=arctg(n+1)-\frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(arctg(n+1)-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$

2.a $I_1=\int_0^1 e^{-x}xdx$

$=\int_0^1 x(e^{-x})'dx=-xe^{-x}\mid_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=$

$=-e^{-1}-e^{-x}\mid_0^1=-2e^{-1}+1$

b $I_n=\int_0^1\left(-e^{-x}\right)'x^n dx=-x^ne^{-x}\mid_0^1+n\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx$

$=-e^{-1}+nI_{n-1}$

c sirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescator

sirul $(I_n)_{n\geq 1}$ marginit inferior de 0, deci convergent

Fie l= $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$. Daca l>0, trecand la limita obtinem l=∞, absurd, deci l=0.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Avem $b^2 = ac.$ Dacă prin absurd nu toate numerele sunt pare, din $a+b+c$ par rezultă că un număr este par și două impare. Atunci unul din membrii relației $b^2 = ac$ este par și celălalt par, fals.

2. $f(a)+f(a+1)=2(a+2)^2 \geq 0.$

3. $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}\log_2 x > 3 \Rightarrow x > 4.$

4. $C_n^1 + C_n^2 = 120 \Rightarrow n(n+1) = 240 \Rightarrow n = 15.$

5. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - a < 0 \Leftrightarrow a > 2.$

6. Avem $B = 90^\circ, A = 30^\circ,$ deci $BA = 4\sqrt{3}$ și aria triunghiului este $8\sqrt{3}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$. Se verifică prin calcul direct că $A^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2$.

b) $\mathrm{Tr}(A) = 0 \Rightarrow A^2 = -\det A \cdot I_2$. Atunci $A^2 \cdot B = B \cdot A^2 = -(\det A)\cdot B$

c) $A^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow A^2 B - \mathrm{Tr}(A)\cdot AB + (\det A)\cdot B = 0_2$

$A^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow BA^2 - \mathrm{Tr}(A)\cdot BA + (\det A)\cdot B = 0_2$

Scăzând relațiile de mai sus rezultă $\mathrm{Tr}(A)\cdot(AB - BA) = 0_2 \Rightarrow AB = BA$

2. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\sum_{1\le i<j\le 4} x_i x_j = 10.$

b) $(X-1)(X-3) \mid f \Rightarrow f(1) = f(3) = 0$. Obținem $a = -14, b = 6$

c) Fie u, v cele două rădăcini duble ale polinomului f; din relațiile lui Viète rezultă $2(u+v) = 6$ și $u^2 + v^2 + 4uv = 13$. Atunci $uv = 2$; $u = 1$, $v = 2$, de unde $a = -12, b = 4$

Varianta 96 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a Evident $\lim_{x \searrow k} f(x) = +\infty$ si $\lim_{x \nearrow k} f(x) = -\infty$, k=1,2,...,2008

x=k asimptota verticala pentru k=1,2,...,2008

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x) \Rightarrow$ y=0 asimptota orizontala spre $+\infty$ si $-\infty$

b Fie g:A $\to \mathbb{R}$, g(x)=f(x)-a

$\lim_{x \searrow k} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \nearrow k+1} g(x) = -\infty \Rightarrow (\exists)\, c_k \in (k; k+1)$ astfel incat $g(c_k) = 0$

$k = 1, 2, ..., 2008, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -a, \quad \lim_{x \nearrow 1} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \searrow 2008} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = -a$

$\Rightarrow$ mai avem o solutie in $(-\infty;1)$ sau $(2008;\infty)$

c $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} + \dfrac{2}{(x-2)^3} + ... + \dfrac{2}{(x-2008)^3}$

f'' se anuleaza in (k;k+1) o singura data(strict descrescatoare),

k=1,1,...2008

2007 puncte de inflexiune

2.a $f'(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f strict crescatoare pe $\mathbb{R}$

b $f''(x) = -2e^{-x^2}$

$f''(x) \le 0\ \forall x \in [0;\infty) \Rightarrow$ f concava pe $[0;\infty)$

c $f(n) = \int_0^n e^{-t^2} dt$

$f(n+1) - f(n) = \int_n^{n+1} e^{-t^2} dt > 0 \Rightarrow (f_n)$ crescatoare

$e^{t^2} \ge 1 + t^2 \Rightarrow f(n) \le \int_0^n \dfrac{1}{1+t^2} dt = arctgn < \dfrac{\pi}{2}$

$(f_n)_{n\ge1}$ crescator si marginit superior $\Rightarrow (f_n)_{n\ge1}$ convergent

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $\sqrt[3]{100} < \sqrt[3]{125} = 5 = \log_2 32 < 3! = 6.$

2. Privind ca trinom în x avem $\Delta = 9y^2 - 12y^2 = -3y^2 \le 0,$ de unde cerința.

3. $\sin 2x = \cos x \Rightarrow \cos x = 0$ sau $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

4. $A_5^3 - 4 \cdot C_6^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 0.$

5. $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow C(3,7).$

6. $\sin A = \frac{4}{5} \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{8}{\frac{8}{5}} = 5.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $\det A = -1.$

b) Prin calcul direct rezultă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

c) Fie $B = I_3 + A;$ rezultă $B^2 = 2B.$ Prin inducție rezultă imediat că $B^n = 2^{n-1}B.$

2.a) Restul împărțirii polinomului f_1 la polinomul $X - 2$ este $f_1(2) = 7 \ne 0$, deci $X - 2$ nu divide f

b) Fie g câtul împărțirii lui f_3 la $X - 1$; suma coeficienților polinomului g este $g(1)$

Avem $f_3(1) = -2 \Rightarrow f_3 = (X-1)g - 2 \Rightarrow f_3 + 2 = (X-1)g$

Dar $f_3 + 2 = X^9 - 1 + \left(2X^2 - 4X + 2\right) = (X-1)\left(X^8 + X^7 + ... + X + 1\right) + 2(X-1)^2$, deci

$g = X^8 + X^7 + ... + X + 1 + 2(X-1) \Rightarrow g(1) = 9.$

Alternativ: Fie g câtul împărțirii lui f_3 la $X - 1$; suma coeficienților lui g este $g(1)$

Avem $f_3 = (X-1)g - 2 \Rightarrow f' = (X-1)g' + g$, deci $f'(1) = g(1) \Rightarrow g(1) = 9$

c) Aplicând teorema împărțirii cu rest, rezultă $f_n = \left(X^2 + X + 1\right)q + r,\ r = aX + b \in \mathbb{R}[X]$

Fie ε o rădăcină a polinomului $h = X^2 + X + 1$; atunci $\varepsilon^3 = 1,\ \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$

Însă $f(\varepsilon) = \varepsilon^{3n} + 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1 = -6\varepsilon$ și $f(\varepsilon) = a\varepsilon + b$, deci $a = -6, b = 0 \Rightarrow r = -6X$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\le 0, \forall x\in[0;\infty)$

b **L=** $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(f(x+1)-f(x))=1$ utilizand l'Hopital sau aplicand teorema lui Lagrange

c $Fie\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x+\dfrac{x^3}{3}, g'(x)=\dfrac{x^4}{1+x^2}\ge 0$

$g(0)=0, g\ crescatoare$ de unde $x\in(-\infty;0)$

2.a $\int\limits_0^1 x(1+x^2)f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln 2$

b $F'(x)=x^4 f(x)$ **,** $F'(x)\ge 0$,deci F este strict crescatoare

c $A=\int\limits_0^a f(x)dx, a<1 \Rightarrow A<0<\dfrac{1}{4}$

$a\ge 1, A\le \int\limits_1^a \dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(1+a^2)}$

$A<\dfrac{1}{4}$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Avem $a+bi+2a-2bi=3+i \Rightarrow a=1, b=-1 \Rightarrow |z|=\sqrt{2}.$

2. $x^2-3=0.$

3. $\log_x 2+\log_{\sqrt{x}} 2=9 \Rightarrow 3\log_x 2=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2}.$

4. Sunt $C_5^3=10$ submulțimi cu 3 elemente ale lui *A*, iar singura fără elemente pare este $\{1,3,5\}$; rămân 9 submulțimi.

5. $a=b=-1.$

6. $\cos a=-\frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} a=-\frac{3}{4}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) Matricea sistemului *A* conține un minor nenul de ordin 2, spre exemplu $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$

Dacă *A* are rangul 2, atunci $\det A=0$ (singurul minor de ordin 3). Avem $\det A=2(m-1)$, deci $\det A=0 \Rightarrow m=1$

b) Dacă $x_0+y_0+z_0=4$, din a treia ecuație a sistemului rezultă $x_0=2,\ y_0+z_0=2$. Folosind și a doua ecuație rezultă $y_0=z_0=1$. Atunci, din prima ecuație a sistemului rezultă $m=\frac{1}{2}$

c) Sistemul are soluție unică dacă $\det A\neq 0 \Rightarrow m\neq 1$.

Aplicând regula lui Cramer, rezultă $x=-\frac{1}{m-1},\ y=1,\ z=-\frac{m}{m-1}$

$(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{Z}^3 \Rightarrow m-1\,|\,1 \Rightarrow m\in\{0,2\}$

2.a) $X+1\,|\,f \Rightarrow f(-1)=0$. Cum $f(-1)=5+p \Rightarrow p=-5.$

b) Dacă $\alpha\in\mathbb{R}$ este rădăcină dublă, atunci $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$

Din $f'(\alpha)=0 \Rightarrow 4(\alpha^3-1)=0 \Rightarrow \alpha=1$. Din $f(\alpha)=0 \Rightarrow p=3.$

c) Cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2\sum_{1\le i<j\le 4} x_i x_j=0,$ dacă polinomul ar avea toate rădăcinile reale, atunci acestea ar fi toate egale cu 0, contradicție.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a $f'(x) = nx^{n-1} + n$

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0 \ \forall x \geq 0$

f convexa

b $f'(x) > 0 \ \forall x>0 \Rightarrow$ f strict crescatoare, deci injectiva pe $[0;\infty)$

f(0)=-1 si f(1)=n-2 ≥ 0, f continua $\Rightarrow (\exists) x_n \in (0;1]$

astfel incat $f(x_n) = 0$, x_n unic

c $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n} > 0 \Rightarrow x_n \in \left(0;\frac{1}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

2.a $\int_0^1 f(x)dx = \ln\left(1+e^x\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{e+1}{2}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+e^t}dt$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

b $g'(x) = f(x)\cos x + f(-x)\cos x$

$g'(x) = \cos x$

c $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+e^t}dt$ Fie $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^t\cos t}{1+e^t}dt$

Dar I=J si $I+J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = 2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Rezolvare

1. Avem $n=\sqrt{3}+\sqrt{2}\in(3,4)\Rightarrow[n]=3$.

2. f este funcție strict monotonă, iar compunerea a două funcții de aceeași monotonie este strict crescătoare.

3. $x=3$.

4. Exact două valori ale funcției sunt 1, celelalte fiind 0, deci sunt $C_{10}^2=45$ de funcții.

5. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)\left(2\vec{i}+(m-2)\vec{j}\right)=3m-4\Rightarrow m=3$.

6. Funcția cos este descrescătoare pe intervalul $[0,\pi]$, deci cel mai mare este cos 1.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}$.

b) $f(0)=\det\left(A\cdot A^t+0\cdot B\right)=\det\left(A\cdot A^t\right)=\det(A)\cdot\det\left(A^t\right)=(\det A)^2\geq 0$

c) Fie $f(x)=\begin{vmatrix}a^2+b^2+x & ac+bd+x\\ ac+bd+x & c^2+d^2+x\end{vmatrix}=\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd\right)x+(ad-bc)^2$.

$m=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd$, $n=(ad-bc)^2$

2.a) Pentru $q=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in G$.

b) Fie $x=\cos q\pi+i\sin q\pi,\ y=\cos r\pi+i\sin r\pi,\ q,r\in\mathbb{Q}$. Atunci $xy=\cos(q+r)\pi+i\sin(q+r)\pi\in G$.

c) Rădăcinile polinomului f sunt numerele complexe

$z_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3},\ k=0,1,...,5$. Cum $\frac{k}{3}\in\mathbb{Q}$, pentru orice $k=0,1,...,5$, rezultă că f are toate rădăcinile în G.

Varianta 99 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a $f'(x) = \frac{3x^2+6x+2}{3\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}} - \frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-x+1}}$

$f(0)=0,\ f'(0)=3$

y=3x

b $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

$y=1$ asimptota orizontala spre $+\infty$

c $f(k) = \sqrt[3]{k(k+1)(k+2)+1} - \sqrt[3]{(k-1)k(k+1)+1}$

$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sqrt[3]{n^3+3n^2+2n+1} - 1$

$l = e^{\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+3n^2+2n+1}-n-1)} = e^{-\frac{1}{3}}$

2.a $f_1(e) = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{t^2}{2}\right)' \ln t dt = \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} t dt$

$f_1(e) = \frac{e^4}{4} + \frac{3}{4e^2}$

b $f'(x) = x^n \ln x$

$x \in (0;1) \Rightarrow \ln x \le 0 \Rightarrow f'(x) \le 0$

f *descrescatoare pe* $(0;1)$

$-1 \le \ln t \le 0\ \forall x \in \left[\frac{1}{e};1\right]$

c

$-\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n \le f_n(1) \le 0$

$-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)e^{n+1}} \le f_n(1) \le 0$

$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $a = 2; b = 1$.

2. $x = 0$.

3. $|x-1| = 3 - x \Rightarrow x = 2$.

4. $k \cdot C_7^k = 7 \cdot C_6^{k-1}$.

5. $C(3,9)$.

6. $\sin^2 a = \dfrac{\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \dfrac{4}{29} \Rightarrow |\sin a| = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1.a) $I_2 + A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (I_2 + A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = I_2 + A.$

b) $A^2 = -A$, $A^3 = A^2 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = A$. Prin inducție matematică rezultă că $A^n = (-1)^{n-1} A, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\left\{A^n \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\} = \{-A, A\}$.

c) Fie $B = 2008I_2 - A + A^2 - A^3 + ... + A^{2008} = 2008I_2 - 2008A = 2008(I_2 - A)$.

Cum $I_2 - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 2 \cdot 2008^2.$

2.a) $f(1) + f(-1) = a_n\left(1+(-1)^n\right) + a_{n-1}\left(1+(-1)^{n-1}\right) + ... + a_1\left(1+(-1)\right) + 2a_0$

$1 + (-1)^k \in \{0,2\}$, pentru orice $k \in \{1,2,...,n\}$, deci $f(1) + f(-1)$ este număr par

b) Presupunem că ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină întreagă k; atunci $f(x) = (x-k)g(x)$, unde g este un polinom cu coeficienți întregi.

$f(2) = (2-k)g(2)$ este impar, deci $2-k$ este impar

$f(3) = (3-k)g(3)$ este impar, deci $3-k$ este impar

Atunci $2-k+3-k = 5-2k$ este par, contradicție.

c) Dacă polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$ ar putea fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi, unul dintre aceste polinoame ar fi de gradul 1, deci g ar avea o rădăcină rațională

$x_0 = \dfrac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \geq 1, (p,q) = 1,$ astfel încât $p \mid 1$ și $q \mid 1$. Rezultă $x_0 \in \{-1,1\}$.

Pentru $x_0 = -1 \Rightarrow g(-1) = 3a + 1 = 0$ dacă și numai dacă $a = -\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Pentru $x_0 = 1 \Rightarrow g(1) = 3a + 1 = 0$ dacă și numai dacă $a = -\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Varianta 100 - rezolvari mate MT1

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Solutie

1a) $f'(x)=e^x+3x^2-2x+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezulta ca functia este strict crescatoare

b) din punctul anterior rezulta ca functia este injectiva

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,functia este continua,deci surjectiva,adica inversabila

c) cu substitutia $x=f(y)$ obtinem $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\ln x}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{\ln(e^{3y}+y^3-y^2+y)}=\dfrac{1}{3}$

2a) $$I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=2\ln 3-3\ln 2$$

b) $$I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$$

c) $$nI_n=\int_0^1 nx^n\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\frac{2x(x^n)'}{x+2}dx-\int_0^1\frac{x(x^n)'}{x+1}dx=$$

$=\dfrac{1}{6}-4\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{(x+2)^2}dx+\int_0^1\frac{x^n}{(x+1)^2}dx$, de unde rezulta $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\dfrac{1}{6}$