

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta100

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

 În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(1, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

- (4p) a) Să se determine lungimea segmentului (OA) .
- (4p) b) Să se determine ecuația mediatoarei segmentului (OA) .
- (4p) c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $OA = OB$.
- (4p) d) Să se determine ecuația cercului de centru O și rază OA .
- (2p) e) Să se calculeze produsul de numere complexe $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot i^7$.
- (2p) f) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{1+i}{1-i}$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se determine probabilitatea ca alegând $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ să avem $2^n \leq n^2$.
- (3p) b) Să se determine trei numere în progresie aritmetică crescătoare, știind că suma lor este 9, iar produsul lor este 15.
- (3p) c) Să se rezolve ecuația $\log_x 4 = 2$, pentru $x > 1$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+2} = x$, pentru $x \geq 0$.
- (3p) e) Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se demonstreze că f este strict monotonă pe \mathbf{R} .
- (3p) c) Să se determine asimptotele orizontale ale graficului funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică
Varianta 100

SUBIECTUL III (20p)

În $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_3$.
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) c) Să se arate că matricea B este inversabilă și să se calculeze inversa ei.
- (2p) d) Să se verifice că $AB \neq BA$.
- (2p) e) Să se arate că $(B \cdot A)^n \neq I_3$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că ecuația $X^2 = I_3$ are cel puțin 2007 soluții în mulțimea $M_3(\mathbf{Z})$.
- (2p) g) Să se dea un exemplu de structură de grup în care există două elemente de ordin finit, al căror produs nu are ordin finit.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 6^x - 3^x - 4^x$,

$g(x) = a^x + 6^x - 3^x - 4^x$, $h(x) = b^x$, unde $a, b \in (1, \infty)$.

- (4p) a) Să se calculeze $g'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $g'(0)$ și $g(0)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Utilizând teorema lui Fermat, să se determine $a \in (1, \infty)$, astfel încât $g(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $h^{(n)}(x) = b^x (\ln b)^n$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, unde prin $h^{(n)}(x)$ am notat derivata de ordinul n a funcției h .
- (2p) f) Să se arate că, dacă $p, q, r, s \in \mathbf{R}$, $0 < p < q < r < s$ și $p + s = r + q$, atunci $p^n + s^n > r^n + q^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.
- (2p) g) Să se arate că, $f^{(n)}(0) > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.

Varianta 100

Subiectul I.

- a) $OA = \sqrt{5}$.
- b) $2x + 4y - 5 = 0$.
- c) $a \in \{-2, 2\}$.
- d) $x^2 + y^2 - 5 = 0$.
- e) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot i^7 = 1$.
- f) $\left| \frac{1+i}{1-i} \right| = 1$.

Subiectul II.

1.

- a) Probabilitatea cerută este $p = \frac{1}{2}$.
- b) Se obțin: $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$
- c) $x = 2$.
- d) $x = 2$.
- e) $y_v = -4$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$
- b) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- c) Dreapta $d_1 : y = -\frac{\pi}{2}$ este asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției, iar dreapta $d_2 : y = \frac{\pi}{2}$ este asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției.
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$
- e) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

Subiectul III.

- a) Se verifică prin calcul direct că $A^2 = B^2 = I_3$.
- b) $\det(A) = -1$, rang $(A) = 3$.
- c) Deoarece $B^2 = B \cdot B = I_3$, matricea B este inversabilă, inversa sa fiind $B^{-1} = B$.

d) Avem $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, așadar $AB \neq BA$.

e) Notăm $C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Se demonstrează prin inducție, folosind ipoteza, că

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ există } a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & b_n \\ 0 & c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Așadar pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 7a_n + 4b_n \end{cases}$.

Cum $a_1 = 2 > 0$ și $b_1 = 7 > 0$, se arată prin inducție că $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0$ și $b_n > 0$.

Deoarece $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \neq 0$, deducem că $\forall n \in \mathbb{N}^*, C^n \neq I_3$.

f) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm matricele $X_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, pentru care $X_n^2 = I_3$.

Așadar ecuația $X^2 = I_3$ are o infinitate de soluții, deci cel puțin 2007.

g) În grupul $(Gl_3(\mathbb{R}), \cdot)$ al matricelor inversabile de ordinul 3 cu coeficienți reali, avem $A, B \in Gl_3(\mathbb{R})$, $A^2 = B^2 = I_3$ și matricea BA are ordinul infinit, deoarece la punctul e) am demonstrat că $\forall n \in \mathbb{N}^*, (BA)^n \neq I_3$.

Subiectul IV.

a) $g'(x) = a^x \cdot \ln a + 6^x \cdot \ln 6 - 3^x \cdot \ln 3 - 4^x \cdot \ln 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $g'(0) = \ln \frac{a}{2}$, iar $g(0) = 0$.

c) Deoarece $f(x) = (3^x - 2^x)(2^x - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă concluzia.

d) Avem că $x = 0$ este punctul de extrem global al funcției g și din teorema lui Fermat, rezultă că $g'(0) = 0$, adică $\ln \frac{a}{2} = 0$, deci $a = 2$.

Pentru $a = 2$, funcția g coincide cu funcția f , pentru care am arătat la punctul c) că $f(x) \geq 0 = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) Se demonstrează prin inducție, folosind ipoteza.

f) Pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, considerăm funcția $\alpha: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(x) = x^n$.

Funcția α este derivabilă pe $(0, \infty)$ și $\alpha'(x) = nx^{n-1}, \forall x > 0$.

Pentru $p, q, r, s \in \mathbf{R}$, cu $0 < p < q < r < s$ și $p + s = r + q$, funcția α este o funcție Rolle pe fiecare dintre intervalele $[p, q]$ și $[r, s]$, deci, conform teoremei lui

Lagrange, există $c \in (p, q)$ și $d \in (r, s)$, cu $\frac{q^n - p^n}{q - p} = n \cdot c^{n-1}$ și $\frac{s^n - r^n}{s - r} = n \cdot d^{n-1}$.

Deoarece $n-1 \geq 1$ și $0 < c < d$, obținem $n \cdot c^{n-1} < n \cdot d^{n-1}$, adică $\frac{q^n - p^n}{q - p} < \frac{s^n - r^n}{s - r}$ și cum avem $q - p = s - r$, rezultă $q^n - p^n < s^n - r^n$, deci $p^n + s^n > r^n + q^n$.

g) Pentru $x \in \mathbf{R}$ avem $f^{(n)}(x) = 2^x (\ln 2)^n + 6^x (\ln 6)^n - 3^x (\ln 3)^n - 4^x (\ln 4)^n$,

deci $f^{(n)}(0) = (\ln 2)^n + (\ln 6)^n - (\ln 3)^n - (\ln 4)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.

Pentru $p = \ln 2$, $q = \ln 3$, $r = \ln 4$ și $s = \ln 6$, avem $0 < p < q < r < s$ și

$p + s = \ln 2 + \ln 6 = \ln 12 = \ln 4 + \ln 3 = r + q$ și din f) rezultă

$(\ln 2)^n + (\ln 6)^n > (\ln 3)^n + (\ln 4)^n$, adică $f^{(n)}(0) > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.