EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta** ….099*

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $1+7i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(-1,-2,-3)$ la planul $x+y+z-4=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2+y^2=13$ dusă prin punctul $P(2,3)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(-1,2)$, $M(-2,3)$ și $N(-3,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,1,1)$ și $D(-1,-2,-3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\cos\pi+i\sin\pi)^{16}=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 1 și rația este 2, să se calculeze termenul al patrulea.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n\in\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $n+9<3^n$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(2)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+7)=3$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f=X^3-X-24$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulţimea $M_2(\mathbf{Z_3})$ se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$

şi mulţimea $N = \left\{X \in M_2(\mathbf{Z_3}) \mid X^2 = O_2\right\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $O_2 \in N$ şi $A \in N$.

(4p) **b)** Să se verifice că $I_2 \notin N$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $B \in N$, $B = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$, atunci $\hat{a} + \hat{d} = \hat{0}$ şi $\hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c} = \hat{0}$.

(2p) **d)** Să se găsească o matrice $C \in M_2(\mathbf{Z_3})$ cu proprietăţile $\det(C) = \hat{0}$ şi $C \notin N$.

(2p) **e)** Să se determine numărul elementelor mulţimii $M_2(\mathbf{Z_3})$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $P, Q \in N$ şi $P \cdot Q = Q \cdot P$, atunci $P \cdot Q = O_2$.

(2p) **g)** Să se arate că matricea I_2 **nu** se scrie ca o sumă finită de elemente din mulţimea N.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = arctg\ x$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$a_n = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(2p) **c)** Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $\forall k \in [0,\infty)$, există $c \in (k, k+1)$,

astfel încât $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{c^2+1}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\dfrac{1}{(k+1)^2+1} < f(k+1) - f(k) < \dfrac{1}{k^2+1}$, $\forall k \in [0, \infty)$.

(4p) **e)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător .

(2p) **f)** Să se arate că $f(n+1) - f(1) < a_n < f(n) - f(0)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita un număr real din

intervalul $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Varianta 099

Subiectul I

a) $5\sqrt{2}$. b) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ .c) $2x+3y=13$. d) $\overrightarrow{LM}(-1,1), \overrightarrow{MN}(-1,1) \Rightarrow$ L, M, N coliniare. e) $\frac{5}{3}$.

f) $a=1, b=0$.

Subiectul II

1. a) 8. b) $\frac{2}{5}$. c) $f(1)=2 \Rightarrow g(2)=1$. d) $x=\pm 1$. e) 0.

2. a) $f'(x)=2xe^{x^2}$. b) $e-1$. c) $f''(x)=2e^{x^2}(1+2x^2)>0, \forall x\in \mathbf{R} \Rightarrow$ f convexa pe **R.**

d) $f'(1)=2e$. e) $\frac{e-1}{2}$.

Subiectul III

a) $O_2^2=O_2 \Rightarrow O_2\in N; A^2=O_2 \Rightarrow A\in N$.

b) $I_2^2=I_2\neq O_2 \Rightarrow I_2\notin N$

c) Dacă $B\in N \Rightarrow \hat{a}^2+\hat{b}\hat{c}=0; (\hat{a}+\hat{d})\cdot\hat{b}=\hat{0}; (\hat{a}+\hat{d})\cdot\hat{c}=0; \hat{d}^2+\hat{b}\hat{c}=\hat{0}\Rightarrow$

1. Daca $\hat{a}+\hat{d}\neq 0 \Rightarrow \hat{a}=\hat{b}=\hat{c}=\hat{d}=\hat{0}$, deci $\hat{a}+\hat{d}=\hat{0}$, contradictie.

2. $\hat{a}+\hat{d}=\hat{0} \Rightarrow \hat{a}\cdot\hat{d}-\hat{b}\cdot\hat{c}=0$.

d) $C=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{Z}_3)$, $\det(C)=0$ si $\hat{a}+\hat{d}=\hat{1}\neq\hat{0}\Rightarrow C\notin N$.

e) $3^4=81$ elemente.

f) Fie $P,Q\in N, P\cdot Q=Q\cdot P$. Avem: $(P+Q)^3=P^3+3P^2Q+3PQ^2+Q^3=O_2 \Rightarrow$
$(P+Q)^2=O_2 \Leftrightarrow P^2+2PQ+Q^2=O_2 \Leftrightarrow PQ=O_2$

g) Dacă $I_2=A_1+A_2+...+A_n, A_1,A_2,...,A_n\in N$, atunci suma elementelor de pe diagonală în cei doi membri este aceeaşi. În stânga obținem suma $\hat{2}$, iar în dreapta $\hat{0}$, conform c).

Subiectul IV

a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \forall x\in \mathbf{R}$.

b) $f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}<0, \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow$ f' strict crescatoare pe $[0,\infty)$.

c) f continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}\Rightarrow f$ continuă pe $[k,k+1]$ şi derivabilă pe $[k,k+1]$, cu k>0 şi putem aplica teorema lui Lagrange pe acest interval $\Rightarrow \exists c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)\Rightarrow f(k+1)-f(k)=\frac{1}{c^2+1}$.

d) Folosind c), avem $c\in(k,k+1)$ deci $k<c<k+1$ şi cum f' este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$, avem $f'(k)>f'(c)>f'(k+1)$, adica $\frac{1}{(k+1)^2+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k^2+1}, \forall k\in[0,\infty)$.

e) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2+1} > 0 \Rightarrow (a_n)$ strict crescator.

f) din d) $\Rightarrow f(2) - f(1) < \dfrac{1}{1^2+1}$;...;$f(n+1) - f(n) < \dfrac{1}{n^2+1}$; prin insumare se obtine $f(n+1) - f(1) < a_n$

$\dfrac{1}{1^2+1} < f(1) - f(0)$; $\dfrac{1}{2^2+1} < f(2) - f(1)$;...;$\dfrac{1}{n^2+1} < f(n) - f(n-1)$; prin insumare se obtine $a_n < f(n) - f(0)$.

g) Din e, f $\Rightarrow (a_n)$ convergent si trecand la limita in inegalitatile de la f avem $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.