

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D**

**Varianta ....098**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine distanța dintre punctele  $A(2,-1,0)$  și  $B(-1,1,2)$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $1 - \cos 2007\pi$ .
- (4p) c) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale elipsei  $2x^2 + 3y^2 - 5 = 0$  cu dreapta  $x = y$ .
- (4p) d) Să se determine  $\vec{v} + \vec{w}$  dacă  $\vec{v} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$ ,  $\vec{w} = -3\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k}$ .
- (2p) e) Să se determine conjugatul numărului complex  $20 + 30i$ .
- (2p) f) Să se determine aria unui triunghi având perimetrul egal cu 18 și lungimea razei cercului inscris egală cu  $\sqrt{3}$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

**1.**

- (3p) a) Să se determine suma  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ , unde  $x_1, x_2, x_3, x_4$  reprezintă rădăcinile polinomului  $f = X^4 + X^2 + 1$ .
- (3p) b) Dacă funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este  $f(x) = x^3 - 1$  se determine  $(f \circ f)(1)$ .
- (3p) c) Să se arate că numărul  $\lg 2 + \lg 5$  este natural.
- (3p) d) Să se determine soluția reală a ecuației  $x^3 = 27$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea  $\{1, 2, \dots, 26\}$  să fie par.

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^{2007}$ .

- (3p) a) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției  $f$ .
- (3p) c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției  $f$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2008}} \int_0^n f(x) dx$

**SUBIECTUL III (20p)**

Se consideră mulțimea  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ , care împreună cu operațiile de adunare și înmulțire uzuale are structura algebrică de inel și funcția  $f : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $f(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$ ,  $a, b \in \mathbf{Z}$ .

- (4p) a) Să se arate că  $f(x \cdot y) = f(x)f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f(x) = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $f(1 + \sqrt{2}) = -1$ .
- (2p) d) Să se arate că mulțimea  $A = \{x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \mid f(x) = 1\}$  conține cel puțin 2007 elemente.
- (2p) e) Să se arate că mulțimea  $B = \{x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \mid f(x) = -1\}$  conține cel puțin 2007 elemente.
- (2p) f) Să se arate că dacă  $a + b\sqrt{2} \neq 0$ ,  $a, b \in \mathbf{Z}$ , atunci  $(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = 1$ , unde  $a' = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$ ,  $b' = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}$ .
- (2p) g) Să se arate că mulțimea elementelor inversabile din inelul  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  este  $C = A \cup B$ .

**SUBIECTUL IV (20p)**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  și sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ , definit prin

$$x_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x} dx, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Să se arate că  $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$ ,  $\forall k \in (0, \infty)$ .
- (4p) c) Utilizând metoda schimbării de variabilă, să se arate că  $x_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) d) Utilizând inegalitățile de la punctul b), să se arate că  $\ln(2n+1) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \ln 2$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) e) Să se arate că  $x_n = \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt + \int_0^\pi \frac{\sin t}{(n+1)\pi + t} dt + \dots + \int_0^\pi \frac{\sin t}{(2n-1)\pi + t} dt$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) f) Să se arate că  $\frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \leq x_n \leq \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

### Varianta 98

#### Subiectul I

- a) 5. b) 2. c)  $(-1, -1), (1, 1)$ . d)  $\vec{v} + \vec{w} = 12\vec{j}$ . e) 20-30i; f)  $9\sqrt{3}$ .

#### Subiectul II

1. a) 0. b) -1. c)  $\lg 10 = 1 \in N$ . d)  $x = 3$ . e)  $\frac{13}{26} = \frac{1}{2}$ .
2. a)  $f'(x) = 2007x^{2006}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . b) 0 puncte de extreme. c) 1 punct de inflexiune.
- d)  $f'(1) = 2007$ . e)  $\frac{1}{2008}$ .

#### Subiectul III

- a)  $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ , deci  $x = a + b\sqrt{2}$ ,  $y = c + d\sqrt{2}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ . Atunci  $x \cdot y = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}$ , deci  $f(xy) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = a^2c^2 + 4abcd + 4b^2d^2 - 2a^2d^2 - 4abcd - 2b^2c^2 = (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = f(x)f(y)$ .

b) Fie  $x = a + b\sqrt{2}$ ,  $a, b \in \mathbf{Z}$ . Atunci  $f(x) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 = 0$ , adică  $a^2 = 2b^2$ .

Presupunem  $a \neq 0$ , fie  $(a, b) = d$ , deci  $a = dm$ ,  $b = dn$ ,  $(m, n) = 1$  și din  $a^2 = 2b^2$  avem  $m^2 = 2n^2$  și obținem că 2 este divizor comun pentru m, n, deci cotradicție. Atunci  $a^2 = 2b^2$ ,  $a, b \in \mathbf{Z}$  dacă și numai dacă  $a = b = 0$ , adică  $x = 0$ .

c)  $f(1 + \sqrt{2}) = 1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$ .

d) Pentru  $a = 3$ ,  $b = 2$  avem  $x = a + b\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$  și  $a^2 - 2b^2 = 1$ , deci  $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ . Dar dacă  $x = a + b\sqrt{2}$ ,  $y = c + d\sqrt{2}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$  avem  $x \cdot y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ , deci  $x^n \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ . Adică  $x, x^2, x^3, \dots \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ , sir crescător, deci cu elemente distințe.

e) Se arată asemănător cu d) pentru  $a = b = 1$ ,  $(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$ ,  $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^{2n+1} = -1$ .

f) Calcul direct.

g) „ $\subset$ ” Dacă  $z \in U(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])$  și  $z' \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  este inversul său, atunci  $z \cdot z' = 1$ , deci  $f(z \cdot z') = f(1)$ , adică  $1 = f(z) \cdot f(z')$ .

Deoarece  $f(z), f(z') \in \mathbf{Z}$ , obținem că  $f(z) \in \{-1, 1\}$ , deci  $z \in A \cup B$ . Așadar  $U(\mathbf{Z}[\sqrt{2}]) \subset A \cup B$ .

„ $\supset$ ” Dacă  $z = a + b\sqrt{2} \in A \cup B$ , atunci  $f(z) \in \{-1, 1\}$ .

I.  $f(z) = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 = 1 \Leftrightarrow (a + b\sqrt{2}) \cdot (a - b\sqrt{2}) = 1$ , deci  $z$  este inversabil, inversul său fiind

$$z' = a - b\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$$

II.  $f(z) = -1 \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 = -1 \Leftrightarrow (a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = -1$ , deci  $z$  este inversabil, inversul său fiind  $z' = -a + b\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ .

În ambele cazuri obținem că  $z \in U(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])$ , astădat  $A \cup B \subset U(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])$ .

În concluzie,  $U(\mathbf{Z}[\sqrt{2}]) = A \cup B$ .

#### Subiectul IV

a)  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, \infty)$ ;

b) Din  $f$  continuă și derivabilă obținem  $f$  continuă pe  $[k, k+1]$  și derivabilă pe  $(k, k+1)$ ,  $\forall k \in (0, \infty)$ , putem aplica teorema lui Lagrange pe  $[k, k+1]$  și obținem ca  $\exists c \in (k, k+1)$  astfel incat  $f'(c) = \ln(k+1) - \ln(k)$ . Din  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \in (0, \infty)$  obținem  $f'$  strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$  deci din  $k < c < k+1$  avem  $f'(k) > f'(c) > f'(k+1)$ , adică

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}, \forall k \in (0, \infty).$$

c) Notam  $t = nx$  și avem  $dt = ndx$ , iar pentru  $x = \pi$ ,  $t = n\pi$  și pentru  $x = 2\pi$ ,  $t = 2n\pi$ ,

$$\text{deci } x_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x} dx = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} \cdot \frac{1}{n} dt = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt, \forall x \geq 1;$$

d) Scriem relația de la punctual b) pentru  $k$  de la  $n+1$  până la  $2n$ .

e)  $x_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=n}^{2n+1} I_k$ , unde  $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ . În  $I_k$  facem substituția

$$t = k\pi + y \text{ și obținem } I_k = \int_0^\pi \frac{\sin y}{k\pi + y} dy;$$

f)  $\frac{\sin y}{k\pi + \pi} \leq \frac{\sin y}{k\pi + y} \leq \frac{\sin y}{k\pi}$ ,  $y \in [0, \pi] \Rightarrow \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin y dy \leq I_k \leq \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin y dy$ , deci

$$\frac{2}{\pi(k+1)} \leq I_k \leq \frac{2}{\pi \cdot k}. \text{ Prin sumare de la } k = n \text{ la } k = 2n-1 \text{ obținem rezultatul.}$$

g) Dacă trecem la limită în d) rezultă:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2. \text{ Obținem din f)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{\pi} \ln 2.$$