

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....097***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului  $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(0, 4, 2)$  la planul  $x + y + z + 4 = 0$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la cercul  $x^2 + y^2 = 13$  în punctul  $P(2, 3)$ .
- (4p) d) Să se arate că punctele  $L(1, 2, 3)$ ,  $M(4, 5, 6)$  și  $N(7, 8, 9)$  sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(-1, 1)$ ,  $B(-2, 2)$ ,  $C(3, 3)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât vectorii  $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$  și  $\vec{w} = 3\vec{i} + a\vec{j}$  să fie perpendiculari.

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul 
$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $\hat{x} \in \mathbb{Z}_6$  să verifice relația  $\hat{x}^2 + \hat{x} = \hat{2}$ .
- (3p) c) Să se calculeze matricea 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2007}$$
.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x^2 + 7) = \log_2(5x^2 + x + 2)$ .
- (3p) e) Să se calculeze inversa matricei 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
.

 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \sin x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f'(x) dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x}{5x^2 + 6} dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $G = \{f_n \in \mathbf{R}[X] \mid f_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^n, n \in \mathbf{N}\}$  și polinoamele  $g = (1 + X + X^2)(1 + X^3)$ ,  $h = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)$ ,  $g_n = (1 + X + X^2 + \dots + X^n)(1 + X^{n+1})$  și  $h_n = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \cdot \dots \cdot (1 + X^{2^n})$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

- (4p) a) Să se arate că  $g \in G$  și  $h \in G$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $h(0) - g(0)$ .
- (4p) c) Să se arate că polinoamele  $g$  și  $h$  au o rădăcină reală comună.
- (2p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului  $h$  la polinomul  $g$ .
- (2p) e) Să se arate că  $g_n \in G$  și  $h_n \in G$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .
- (2p) f) Să se determine  $n \in \mathbf{N}$  pentru care  $h_n = g_n$ .
- (2p) g) Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , câtul împărțirii polinomului  $h_n - g_n$  la polinomul  $X^{2n+2}$  este un polinom din mulțimea  $G$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^\alpha - \alpha \cdot x$ , unde  $\alpha \in (0, 1)$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x > 0$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in (0, 1)$  și  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in (1, \infty)$ .
- (4p) c) Să se deducă inegalitatea  $x^\alpha - \alpha \cdot x \leq 1 - \alpha$ ,  $\forall x > 0$ .
- (2p) d) Alegând  $x = \frac{a}{b}$ , cu  $a, b > 0$  și notând  $\beta = 1 - \alpha$ , să se arate că  $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$ ,  $\forall a, b > 0$  și  $\forall \alpha, \beta > 0$  cu  $\alpha + \beta = 1$ .
- (2p) e) Să se arate că  $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$ ,  $\forall s, t > 0$  și  $\forall p, q > 1$  cu  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
- (2p) f) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că, dacă  $a_1, \dots, a_n$  și  $b_1, \dots, b_n$  sunt numere reale strict pozitive,  $p, q > 1$  cu  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , atunci  $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$ .
- (2p) g) Să se demonstreze că, dacă  $h, g : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  sunt două funcții continue și  $p, q > 1$  cu  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , atunci  $\int_0^1 h(x)g(x)dx \leq \left( \int_0^1 h^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}$ .

## Varianta 97

**Subiectul I.**

- a)  $|\vec{v}| = 5$ .
- b)  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ .
- c) Tangenta prin  $P$  la cerc are ecuația:  $2x + 3y - 13 = 0$ .
- d) Punctele  $L, M, N$  sunt coliniare  $\Leftrightarrow \frac{x_M - x_L}{x_N - x_L} = \frac{y_M - y_L}{y_N - y_L} = \frac{z_M - z_L}{z_N - z_L}$ , adevărat.
- e) Aria triunghiului  $ABC$  este  $S = 3$ .
- f)  $a = 4$ .

**Subiectul II.**

**1.**

- a)  $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .
- b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{1}{3}$ .
- c)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2007} = O_2$ .
- d)  $x \in \left\{-\frac{5}{4}, 1\right\}$ .
- e) Inversa matricei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  este  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ .

**2.**

- a)  $f'(x) = 1 - \cos x$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- b)  $\int_0^1 f'(x) dx = 1 - \sin 1$ .
- c)  $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ , deoarece derivata sa se anulează doar în puncte izolate.
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 - \cos 1$ .
- e)  $\int_0^1 \frac{x}{5x^2 + 6} dx = \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{11}{6}$ .

### Subiectul III.

a)  $g = f_5 \in G$  și  $h = f_7 \in G$ .

b)  $h(0) - g(0) = 0$ .

c) Observăm că  $g$  și  $h$  au rădăcina comună  $x = -1$ .

De asemenea,  $h$  nu mai are alte rădăcini reale, aşadar singura rădăcină reală comună este  $x = -1$ .

d) Restul împărțirii lui  $h$  la  $g$  este  $r = X + 1$ .

e)  $g_n = f_{2n+1} \in G$ .

Prin desfaceri succesive ale parantezelor sau prin inducție obținem  $h_n = f_{2^{n+1}-1} \in G$ .

f) Observăm că pentru  $k, n \in \mathbb{N}$ , avem  $f_k = f_n \Leftrightarrow k = n$  (necesitatea se deduce egalând gradele, iar suficiența este evidentă)

$$h_n = g_n \Leftrightarrow f_{2^{n+1}-1} = f_{2n+1} \Leftrightarrow 2^n = n+1.$$

Ecuția anterioară are soluțiile  $n = 0$  și  $n = 1$ , iar pentru  $n \geq 2$  se demonstrează prin inducție că  $2^n > n+1$ . Așadar  $n \in \{0, 1\}$ .

g) Pentru  $n \geq 2$ , avem  $2^n > n+1$ , de unde deducem că  $2^{n+1} - 2n - 3 \in \mathbb{N}$ , deci

$$h_n - g_n = X^{2^{n+2}} \cdot (1 + X + \dots + X^{2^{n+1}-2n-3}) = X^{2^{n+2}} \cdot f_{2^{n+1}-2n-3}, \text{ de unde rezultă concluzia..}$$

### Subiectul IV.

a)  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .

b)  $f'(x) = \alpha \left( \left( \frac{1}{x} \right)^{1-\alpha} - 1 \right)$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .

Avem  $1 - \alpha \in (0, 1)$ .

$$x \in (0, 1) \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{x} \right)^{1-\alpha} > 1 \Leftrightarrow f'(x) > 0,$$

$$\text{iar } x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{x} \right)^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow f'(x) < 0.$$

c) Din b) deducem că  $x = 1$  este punctul de maxim global al funcției  $f$ .

Așadar,  $\forall x \in (0, \infty)$ ,  $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \forall x \in (0, \infty)$ ,  $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$ .

d) Pentru  $\alpha, \beta > 0$  cu  $\alpha + \beta = 1$ , punând  $x = \frac{a}{b}$  în relația de la c) obținem

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$$

e) Punând  $\alpha = \frac{1}{p}$ ,  $\beta = \frac{1}{q}$ ,  $a = s^p$  și  $b = t^q$  în relația de la punctul d), obținem:

$$(s^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (t^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} \Leftrightarrow st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}.$$

f) Punând  $s = \frac{a_1}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}$ ,  $t = \frac{b_1}{(b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}}$ , în e), obținem:

$$\frac{a_1}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_1}{(b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{a_1^p}{p \cdot (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)} + \frac{b_1^q}{q \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)}$$

și analog,

$$\frac{a_2}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_2}{(b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{a_2^p}{p \cdot (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)} + \frac{b_2^q}{q \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)}$$

.....

$$\frac{a_n}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_n}{(b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{a_n^p}{p \cdot (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)} + \frac{b_n^q}{q \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)}$$

Adunând membru cu membru inegalitățile obținute și ținând cont de faptul că

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ se obține concluzia.}$$

g) Înlocuind în e)  $s = \frac{h(x)}{\left(\int_0^1 h^p(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}}$  și  $t = \frac{g(x)}{\left(\int_0^1 g^q(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}}$  obținem:

$$\frac{h(x)}{\left(\int_0^1 h^p(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{g(x)}{\left(\int_0^1 g^q(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{h^p(x)}{\int_0^1 h^p(x) dx} + \frac{1}{q} \cdot \frac{g^q(x)}{\int_0^1 g^q(x) dx}, \text{ și integrând această}$$

inegalitate pe intervalul  $[0, 1]$  rezultă concluzia.