

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....096***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele  $A(-2, -2, -2)$  și  $B(3, 3, 3)$ .
- (4p) b) Să se determine raza cercului  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la parabola  $y^2 = 4x$  în punctul  $P(4, 4)$ .
- (4p) d) Să se calculeze modulul numărului complex  $\frac{7+5i}{5-7i}$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria unui triunghi cu vârfurile în punctele  $M(2, 0), N(3, 3)$  și  $P(0, 2)$ .
- (2p) f) Să se calculeze produsul  $(\cos 1^\circ - \cos 7^\circ) \cdot (\cos 2^\circ - \cos 6^\circ) \cdot \dots \cdot (\cos 7^\circ - \cos 1^\circ)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze suma primilor 5 termeni dintr-o progresie aritmetică în care primul termen este 1 și rația este 4.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $2^n \leq 3n$ .
- (3p) c) Să se calculeze suma elementelor grupului  $(\mathbf{Z}_7, +)$ .
- (3p) d) Să se calculeze expresia  $E = C_5^1 - C_5^2 + C_5^3 - C_5^4$ .
- (3p) e) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^{\pi} f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n \sin x dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $I = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $K = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{4} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ,  $M = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{4} \end{pmatrix}$

și mulțimea  $U = \{X \in M_2(\mathbf{R}) \mid X^2 = X\}$ .

- (4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei  $L$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $I \in U$  și că  $L \in U$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , matricele  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$  sunt din mulțimea  $U$ .
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că dacă matricea  $B \in U$ , atunci  $B^n = B$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) e) Să se arate că dacă matricea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ , atunci  $a+d \in \{0, 1, 2\}$ .
- (2p) f) Să se scrie matricea  $M$  ca o sumă finită de matrice din mulțimea  $U$ .
- (2p) g) Să se arate că matricea  $K$  nu se poate scrie ca o sumă finită de matrice din mulțimea  $U$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $A = \mathbf{R} - \{1, 2, 3, \dots, 2006\}$  și funcțiile  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2006) \text{ și } g : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-2006}.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $g'(x)$ ,  $x \in A$ .
- (4p) b) Să se arate că  $g'(x) < 0$ ,  $\forall x \in A$ .
- (4p) c) Să se arate că  $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ,  $\forall x \in A$ .
- (2p) d) Să se arate că  $(f'(x))^2 > f(x) \cdot f''(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) e) Să se determine numărul de asymptote verticale ale graficului funcției  $g$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\int_{2007}^{2008} (g(x+1) - g(x)) dx$ .
- (2p) g) Utilizând eventual rezultatul de la punctul c), să se arate că ecuația  $f(x) - af'(x) = 0$  are exact 2006 soluții reale și distințe,  $\forall a \in \mathbf{R}$ .

### Varianta 096

#### **Subiectul I**

- a)  $5\sqrt{3}$ . b) 3. c)  $x-2y+4=0$ . d) 1. e) 4. f) 0.

#### **Subiectul II**

1. a) 45. b)  $\frac{3}{5}$ . c) 0. d) 0. e)  $(x+2)(x^2+1)=0$ , cu solutia reala  $x_1 = -2$ .

2. a)  $f(x)=\cos x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . b)  $\int_0^\pi f(x)dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$ . c)  $f'(x) = -\sin x$ , pentru  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f''(x) < 0$ , deci  $f$  este concavă pe  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

d)  $f'(0) = 1$ . e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos n}{n} = 0$ .

#### **Subiectul III**

a)  $\det L = 0$ , rang  $L = 1$ .

b)  $I^2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = I$ , deci  $I \in U$ .

$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = L$ , deci  $L \in U$ .

c)  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\forall a \in \mathbf{R}$ , deci  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$ .

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\forall b \in \mathbf{R}$ , deci  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in U$ .

d) Pentru  $B \in U$ , notăm  $P(n): B^n = B$ , pentru orice  $n$  natural nenul.  $P(1)$  este evident adevărată. Considerăm  $P(k)$  adevărată și avem  $B^{k+1} = B^k \cdot B = B \cdot B = B^2 = B$ , deci  $P(k+1)$  adevărată. Conform principiului inducției matematice  $P(n)$  este adevărată pentru orice  $n$  număr natural nenul.

e) Dacă  $A \in U$  atunci  $A^2 = A$  și deci  $a^2 + bc = a$ ,  $b(a+d) = b$ ,  $c(a+d) = c$ ,  $bc + d^2 = d$ . Scăzând prima și ultima egalitate obținem  $a^2 - d^2 = a - d$ , deci  $(a-d)(a+d) = a - d$ . Pentru  $a \neq d$  obținem  $a+d=1$  iar pentru  $a=d$ , înlocuind în egalitatea pentru  $b=0$  avem  $a=0$  sau  $a=1$ , iar dacă  $b \neq 0$  avem  $a=\frac{1}{2}$ .

Deoarece  $a=d$  obținem  $a+d=0$  sau  $a+d=2$  sau  $a+d=1$ .

f) De exemplu  $M = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = L + A + B$ , din b) avem

$L \in U$ , iar din c)  $A, B \in U$ .

g)  $\text{Tr } K = 1 + \sqrt{3}$ , Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n \in U$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , astfel încât  $K = X_1 + \dots + X_n$ . Atunci  $\text{Tr}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Tr}(X_1) + \text{Tr}(X_2) + \dots + \text{Tr}(X_n) \in \mathbf{N}$ , conform punctului e), deci  $K$  nu se poate scrie ca o sumă finită de matrici din  $U$ .

### Subiectul IV

a)  $g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \dots - \frac{1}{(x-2006)^2}, \forall x \in A.$

b)  $g'(x) = \left[ \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \dots + \frac{1}{(x-2006)^2} \right] < 0, \forall x \in A.$

c)

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{(x-2) \cdot \dots \cdot (x-2006) + (x-1) \cdot (x-3) \cdot \dots \cdot (x-2006) + (x-1) \dots (x-2005)}{(x-1)(x-2) \dots (x-2006)} = \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-2006} = g(x), \forall x \in A. \end{aligned}$$

d) Din c) obținem  $f'(x) = f(x) \cdot g(x)$ , deci  $f''(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =$

$$f'(x) \cdot \frac{f(x)}{f(x)} + f(x) \cdot g'(x). \text{ Deci } f''(x) \cdot f(x) = (f'(x))^2 + f^2(x) \cdot g'(x) < (f'(x))^2 \text{ deoarece din b)}$$

avem  $g'(x) < 0$ , pentru orice  $x$  din  $A$ .

e) Pentru  $a \in \{1, 2, \dots, 2006\}$  avem  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ z < a}} g(x) = -\infty$  respectiv  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ z > a}} g(x) = \infty$  deci graficul lui

f cu 2006 asimptote verticale.

f) Pentru  $a, b > 2006$ ,  $g$  continuă pe  $[a, b]$ , deci integrabilă pe  $[a, b]$  și folosind c)

$$\text{avem } \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| \Big|_a^b = \ln|f(b)| - \ln|f(a)|$$

$$\text{respectiv } \int_a^b g(x+1) dx = \int_{a+1}^{b+1} g(t) dt = \int_{a+1}^{b+1} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln|f(t)| \Big|_{a+1}^{b+1} = \ln|f(b+1)| - \ln|f(a+1)|.$$

$$I = \int (g(x+1) - g(x)) dx = \ln|f(2009)| - \ln|f(2008)| - \ln|f(2008)| + \ln|f(2007)|.$$

Pentru  $x \geq 2007$  avem  $f(x) \geq 0$  deci

$$I = \ln \frac{f(2009) \cdot f(2007)}{f^2(2008)} = \ln \frac{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2008 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2006}{(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2007)^2} = \ln \frac{2008! \cdot 2006!}{2 \cdot (2007!)^2} =$$

$$\ln \frac{2008}{2 \cdot 2007} = \ln \frac{1004}{2007}.$$

g) Pentru  $a=0$  ecuația devine  $f(x)=0$  și are 2006 soluții reale și distințe:  $1, 2, \dots, 2006$ ;

$$\text{Pentru } a \neq 0 \text{ ecuația devine } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{a}, \text{ deci } g(x) = \frac{1}{a}.$$

Pentru  $a > 0$  avem 2006 soluții distințe situate în intervalele  $(1, 2), (2, 3), \dots, (2005, 2006), (2006, \infty)$ , iar pentru  $a < 0$  avem 2006 soluții distințe situate în  $(-\infty, 1), (1, 2), \dots, (2005, 2006)$ .