

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....095***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**
**(4p)**

- a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al dreptei  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-1}$  cu planul  $z=0$ .

**(4p)**

- b) Să se determine valoarea numărului  $\sin^2 2007 + \cos^2 2007$ .

**(4p)**

- c) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsa  $9x^2 + 4y^2 - 25 = 0$  și dreapta  $x=0$ .

**(4p)**

- d) Să se determine modulul vectorului  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

**(2p)**

- e) Să se determine modulul numărului complex  $1+i$ .

**(2p)**

- f) Să se determine aria unui triunghi care are lungimea unei laturi 10 și lungimea înălțimii corespunzătoare ei 6.

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**
**(3p)**

- a) Să se determine restul împărțirii polinomului  $X^3 - 1$  la polinomul  $X^2 + X + 1$ .

**(3p)**

- b) Să se calculeze numărul  $\log_5 2 \cdot \log_2 5$ .

**(3p)**

- c) Să se determine soluția reală a ecuației  $5^x = 7^x$ .

**(3p)**

- d) Să se determine partea întreagă a numărului  $\pi$ .

**(3p)**

- e) Să se determine probabilitatea ca un element  $n \in \{9,10,11,12,13\}$  să verifice relația  $\lg n < 1$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \cos 2x$ .

**(3p)**

- a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

**(3p)**

- b) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)-1}{x-\pi}$ .

**(3p)**

- c) Să se arate că  $f(x+\pi) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

**(3p)**

- d) Să se calculeze  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ .

**(3p)**

- e) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos 2n}{n}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ,  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  și sirurile  $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$

și  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  date prin relațiile de recurență:  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ . Notăm  $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

- (4p) a) Să se arate că funcția  $f$  este bijectivă.
- (4p) b) Să se arate că  $F_n \neq 10$ , pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ .
- (4p) c) Să se determine  $n \in \mathbf{N}$ , astfel ca  $F_n = 21$ .
- (2p) d) Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se demonstreze că
 
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \forall n \in \mathbf{N}.$$
- (2p) e) Să se arate că  $a_n = f_n(a_0)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) f) Să se arate că  $f_n(x) = \frac{F_{n+1} \cdot x + F_n}{F_n \cdot x + F_{n-1}}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Pentru  $n \in \mathbf{N}^*$  se consideră funcțiile  $f_n : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{\operatorname{tg}^n x}{\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x}$ ,

$g_n : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g_n(x) = \frac{\operatorname{ctg}^n x}{\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

- (4p) a) Să se arate că  $f_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g_n(x)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .
- (4p) b) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f_n(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} g_n(x)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f_1(x) dx$ .
- (2p) d) Să se arate că funcțiile  $f_n$  sunt crescătoare iar funcțiile  $g_n$  sunt descrescătoare,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) e) Să se arate că  $\int_{\frac{\pi}{4}-a}^{\frac{\pi}{4}+a} f_n(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}-a}^{\frac{\pi}{4}+a} g_n(x) dx = a$ , pentru orice  $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) f) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ , unde  $0 < a < b < \frac{\pi}{4}$ .
- (2p) g) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{3}} f_n(x) dx$ .

### Varianta 095

#### **Subiectul I**

- a) Punând  $z=0$  în ecuația dreptei obținem  $(10,5,0)$ . b) 1. c)  $(0; \frac{5}{2})$ ;  $(0; -\frac{5}{2})$ . d)  $\sqrt{3}$ . e)  $\sqrt{2}$ . f) 30.

**Subiectul II** 1. a) 0. b) 1. c)  $x=0$ . d) 3. e)  $\frac{1}{5}$ .

2. a)  $f'(x) = -2\sin 2x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . b)  $f'(\pi) = 0$ ; c)  $f(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) = \cos 2x = f(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

d)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$ . e) Deoarece  $-1 \leq \cos 2n \leq 1$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ , rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos 2n}{n} = 0.$$

#### **Subiectul III**

a) Fie  $x_1, x_2 \in \mathbf{R-Q}$  cu  $f(x_1) = f(x_2)$ . Obținem  $1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_2}$  de unde  $x_1 = x_2$ , deci  $f$

injectivă. Fie  $y \in \mathbf{R-Q}$ . Din  $y = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y-1}$  obținem că pentru orice  $y \in \mathbf{R-Q}$

există  $x = \frac{1}{y-1} \in \mathbf{R-Q}$  astfel încât  $f(x) = y$ , deci  $f$  surjectivă.

b)  $F_2 = 1$ ,  $F_3 = 2$ ,  $F_4 = 3$ ,  $F_5 = 5$ ,  $F_6 = 8$ ,  $F_7 = 13$  și  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geq F_7 = 13$ , pentru orice  $n \geq 8$ , deci  $F_n \neq 10$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ . ( $(F_n)$  strict cresc.). c)  $F_8 = F_7 + F_6 = 21$ , deci  $n = 8$ .

d) Demonstrăm prin inducție. Pentru  $n = 0$  este evident ( $0 = 0$ ).

Dacă  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$  și  $F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right)$  atunci

$$F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) = F_{n+1}.$$

e) Fie  $P(n)$ :  $a_n = f_n(a_0)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .  $P(1)$ :  $a_1 = f_1(a_0)$  adev. Fie  $P(k)$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$  adev., deci  $a_k = f_k(a_0)$  și avem  $a_{k+1} = f(a_k) = f(f_k(a_0)) = f_{k+1}(a_0)$ , deci  $P(k+1)$  adev.  $\Rightarrow P(n)$  adev. pt.  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

f)  $P(n)$ :  $f_n(x) = \frac{F_{n+1}x + F_n}{F_nx + F_{n-1}}$ ,  $x \in \mathbf{R-Q}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .  $P(1)$ :  $f(x) = \frac{F_2x + F_1}{F_1x + F_0}$  este adevărată.

Considerăm  $P(k)$  adev., deci  $f_k(x) = \frac{F_{k+1}x + F_k}{F_kx + F_{k-1}}$  și avem  $f_{k+1}(x) = (f \circ f_k)(x) = 1 + \frac{1}{f_k(x)} = 1 + \frac{F_{k+2}x + F_{k+1}}{F_{k+1}x + F_k}$

$\frac{F_kx + F_{k-1}}{F_{k+1}x + F_k} = \frac{F_{k+1}x + F_kx + F_k + F_{k-1}}{F_{k+1}x + F_k} = \frac{F_{k+2}x + F_{k+1}}{F_{k+1}x + F_k}$ , deci  $P(k+1)$  adev.  $P(n)$  adev  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}a_0 + F_n}{F_na_0 + F_{n-1}} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] a_0 + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] a_0 + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

#### Subiectul IV

a) Avem  $\tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ctgx$  și  $\ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tg x$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{1 + \frac{\ctg^n x}{\tg^n x}} \right) = 1, \text{ și analog } \lim_{x \rightarrow 0} g_n(x) = 1.$$

$$c) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f_1(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tg x}{\tg x + \ctgx} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \left( x - \sin x \cos x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-2}{4} \right).$$

$$d) f_n(x) = 1 - \frac{1}{\tg^{2n} x + 1}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}. \text{ Fie } x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x_1 < x_2. \text{ Funcția } \tg \text{ este strict}$$

crescătoare pe  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și obținem  $f_n(x_1) < f_n(x_2)$ , deci  $f_n$  este strict crescătoare. Atunci

$$f_n\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) > f_n\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right), \text{ deci } g_n(x_1) > g_n(x_2), \text{ de unde } g_n \text{ descrescătoare.}$$

$$e) I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}-a}^{\frac{\pi}{4}+a} f_n(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}-a}^{\frac{\pi}{4}+a} g_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = - \int_{-\frac{\pi}{4}+a}^{-\frac{\pi}{4}-a} g_n(t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}-a}^{\frac{\pi}{4}+a} g_n(-x) dx.$$

$$g_n(-x) = g_n(x), \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}-a}^{\frac{\pi}{4}+a} g_n(x) dx = I_2. I_1 + I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}-a}^{\frac{\pi}{4}+a} dx = 2a. \text{ Deci } I_1 = I_2 = a.$$

$$f) 0 \leq \int_a^b f_n(x) dx \leq \int_a^b \frac{\tg^n x}{2} dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b \tg^n b dx = \frac{1}{2} (b-a) (\tgb)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0.$$

$$g) \text{ Avem } \int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{3}} f_n(x) dx = \int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{6}} f_n(x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f_n(x) dx = \frac{\pi}{12} + \int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{6}} f_n(x) dx \text{ și, din f), rezultă că}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{3}} f_n(x) dx = \frac{\pi}{12}.$$