

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta094

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3+2i}{2+3i}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2,8)$ la planul $x+2y+3z-9=0$.
- (4p) c) Să se determine punctele de intersecție dintre cercul $x^2+y^2=1$ și dreapta $x=2y$.
- (4p) d) Să se arate că $\cos 1 > \cos 2$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 3)$, $B(3, 1)$ și $C(-1, -1)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^3 = a + bi .$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $\log_2 \sqrt{8}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_4$ să verifice relația $\hat{x}^3 = \hat{1}$.
- (3p) c) Să se determine numărul de mulțimi X care verifică $\{1,2\} \subseteq X \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 25^x = 30$.
- (3p) e) Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f = X^3 + X - 2$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - \operatorname{arctg} x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze matricele $P+Q$ și $(P+Q)^2$.
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei P .
- (4p) c) Să se arate că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det(A) + \det(B))$, $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $x, y, a, b \in \mathbf{R}$ și $x+y=2(a+b)$, atunci $x \geq a+b$ sau $y \geq a+b$.
- (2p) e) Să se arate că $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$, avem $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$ sau $\det(A-B) \geq \det(A) + \det(B)$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in M_2(\mathbf{R})$, există o alegere a semnelor astfel încât $\det(A_1 \pm A_2 \pm \dots \pm A_n) \geq \det(A_1) + \det(A_2) + \dots + \det(A_n)$.
- (2p) g) Să se arate că există o alegere a semnelor + și - astfel încât $(\cos 1 \pm \cos 2 \pm \dots \pm \cos 2007)^2 + (\sin 1 \pm \sin 2 \pm \dots \pm \sin 2007)^2 \geq 2007$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n, g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \arctg x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right)$

și $g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se calculeze $f_n(0)$ și $g_n(0)$.
- (4p) b) Să se verifice identitatea $1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \dots + (-x^2)^k = \frac{1 - (-x^2)^{k+1}}{1 + x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) c) Să se arate că $f_n'(x) = \frac{-x^{4n-2}}{1+x^2}$ și $g_n'(x) = \frac{x^{4n}}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se arate că: $f_n(x) < 0 < g_n(x)$, $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \arctg x dx$.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$.
- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right) = \arctg x$ $\forall x \in [-1, 1]$.
- (2p) h) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n-2)} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Varianta 94

Subiectul I.

a) $\left| \frac{3+2i}{2+3i} \right| = 1$.

b) $\frac{10\sqrt{14}}{7}$.

c) $A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ și $B\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

d) Funcția cosinus este strict descrescătoare pe $(0, \pi)$, aşadar $\cos 1 > \cos 2$.

e) $S_{ABC} = 6$.

f) $a = -1$ și $b = 0$.

Subiectul II.

1.

a) $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$.

b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{4}$.

c) Există 8 mulțimi cu X cu proprietatea cerută.

d) $x = 1$.

e) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2$.

2.

a) $f'(x) = \frac{3x^2 + 2}{1 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f'(x) dx = 3 - \frac{\pi}{4}$

c) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{5}{2}$.

e) $\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx = \ln 2$.

Subiectul III.

a) $P + Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(P + Q)^2 = I_2$.

b) $\det(P) = 0$, rang $(P) = 1$.

c) Se arată prin calcul direct.

d) Considerăm $x, y, a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât $x + y = 2(a + b)$,

Presupunem că avem $\begin{cases} x < a + b \\ y < a + b \end{cases}$.

Adunând inegalitățile obținem $x + y < 2(a + b)$, fals.

e) Punând în afirmația de la **c**) $x = \det(A + B)$, $y = \det(A - B)$, $a = \det(A)$ și $b = \det(B)$ și folosind **d**), obținem concluzia.

f) Se folosește principiul întâi de inducție și punctul **e**).

g) Alegem matricele $A_k = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix}$, unde $k \in \{1, 2, \dots, 2007\}$.

Avem $\det(A_k) = 1$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, 2007\}$.

Din **f**) rezultă că există cel puțin o alegere a semnelor pentru care avem:

$$\det(A_1 \pm A_2 \pm \dots \pm A_{2007}) \geq \det(A_1) + \det(A_2) + \dots + \det(A_{2007}) = 2007.$$

Mai mult, $\alpha = \det(A_1 \pm A_2 \pm \dots \pm A_{2007}) \geq 2007$.

Subiectul IV.

a) $f_n(0) = g_n(0) = 0$.

b) Evident.

c) Se arată prin calcul direct.

d) Din **c**) rezultă că f_n este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$ și g_n este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Așadar, $\forall x > 0$, $f_n(x) < f_n(0) \stackrel{a)}{=} 0 = g_n(0) < g_n(x)$.

e) Se arată prin calcul direct că $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

f) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ și $x \in [-1, 1]$, avem: $-1 \leq x^n \leq 1$, deci $\frac{-1}{n} \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Trecând la limită în inegalitatea precedentă, deducem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = 0$.

g) Din **d**) deducem: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $-\frac{x^{4n-1}}{4n-1} \leq f_n(x) \leq 0$ și trecând la limită, obținem: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Tinând cont de imparitatea funcției f_n , rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$.

Atunci, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right) = \operatorname{arctg} x$, $\forall x \in [-1, 1]$.

h) Ca la **g)**, deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$.

Înlocuind n cu $n+1$ și integrând apoi relația din ipoteză pe intervalul $[0, 1]$, obținem concluzia.