

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta093

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $5 - i$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,1,1)$ la planul $x + y + z - 4 = 0$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 2$ în punctul $P(1,1)$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(1, 3)$, $M(2, 4)$ și $N(3, 5)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 1, 2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 1, 1)$ și $D(1, 1, 1)$.
- (2p) f) Să se calculeze produsul $(\sin 1^\circ - \cos 1^\circ)(\sin 2^\circ - \cos 2^\circ) \dots (\sin 89^\circ - \cos 89^\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Dacă într-o progresie aritmetică primul termen este 3 și rația este 3, să se calculeze termenul al cincilea.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $n^2 < 2n + 3$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$, are inversa $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 5) = 2$.
- (3p) e) Să se calculeze suma tuturor rădăcinilor polinomului $f = X^3 + 3X - 4$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \arctgx$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.
- (3p) c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_3)$, submulțimea $G = \left\{ X \in M_2(\mathbf{Z}_3) \mid X = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \right\}$ și matricele $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se verifice că $O_2 \in G$ și $I_2 \in G$.
- (4p) b) Să se verifice că dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_3$, atunci $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = \hat{0}$ dacă și numai dacă $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $P, Q \in G$, atunci $P + Q \in G$ și $P \cdot Q \in G$.
- (2p) d) Să se rezolve în mulțimea G ecuația $X^2 = I_2$.
- (2p) e) Să se determine numărul de elemente din mulțimea G .
- (2p) f) Să se arate că pentru orice matrice $A \in G$, $A \neq O_2$, există o matrice $B \in G$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.
- (2p) g) Să se arate că produsul tuturor matricelor diferite de O_2 din mulțimea G , nu depinde de ordinea factorilor și să se calculeze acest produs.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f_0(x) = 1$ și $g_0(x) = e^x$,

respectiv $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)dt$ și $g_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x g_n(t)dt$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f_1(x) = 1 + x$ și $g_1(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f_2(x)$ și $g_2(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ și $g_n(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) d) Să se scrie ecuația asymptotei către $-\infty$ la graficul funcției g_0 .
- (2p) e) Să se arate că $0 \leq g_n(x) - f_n(x) \leq e^x \cdot \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x > 0$.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x > 0$.
- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$, $\forall x > 0$.

Varianta 94

Subiectul I.

a) $\left| \frac{3+2i}{2+3i} \right| = 1$.

b) $\frac{10\sqrt{14}}{7}$.

c) $A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ și $B\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

d) Funcția cosinus este strict descrescătoare pe $(0, \pi)$, așadar $\cos 1 > \cos 2$.

e) $S_{ABC} = 6$.

f) $a = -1$ și $b = 0$.

Subiectul II.

1.

a) $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$.

b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{4}$.

c) Există 8 mulțimi cu X cu proprietatea cerută.

d) $x = 1$.

e) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2$.

2.

a) $f'(x) = \frac{3x^2 + 2}{1 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f'(x) dx = 3 - \frac{\pi}{4}$

c) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{5}{2}$.

e) $\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx = \ln 2$.

Subiectul III.

a) $P + Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(P + Q)^2 = I_2$.

b) $\det(P) = 0$, rang $(P) = 1$.

c) Se arată prin calcul direct.

d) Considerăm $x, y, a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât $x + y = 2(a + b)$,

Presupunem că avem $\begin{cases} x < a + b \\ y < a + b \end{cases}$.

Adunând inegalitățile obținem $x + y < 2(a + b)$, fals.

e) Punând în afirmația de la **c)** $x = \det(A + B)$, $y = \det(A - B)$, $a = \det(A)$ și $b = \det(B)$ și folosind **d)**, obținem concluzia.

f) Se folosește principiul întâi de inducție și punctul **e)**.

g) Alegem matricele $A_k = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix}$, unde $k \in \{1, 2, \dots, 2007\}$.

Avem $\det(A_k) = 1$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, 2007\}$.

Din **f)** rezultă că există cel puțin o alegere a semnelor pentru care avem:

$$\det(A_1 \pm A_2 \pm \dots \pm A_{2007}) \geq \det(A_1) + \det(A_2) + \dots + \det(A_{2007}) = 2007.$$

Mai mult, $\alpha = \det(A_1 \pm A_2 \pm \dots \pm A_{2007}) \geq 2007$.

Subiectul IV.

a) $f_n(0) = g_n(0) = 0$.

b) Evident.

c) Se arată prin calcul direct.

d) Din **c)** rezultă că f_n este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$ și g_n este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Așadar, $\forall x > 0$, $f_n(x) < f_n(0) \stackrel{a)}{=} 0 = g_n(0) < g_n(x)$.

e) Se arată prin calcul direct că $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

f) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ și $x \in [-1, 1]$, avem: $-1 \leq x^n \leq 1$, deci $\frac{-1}{n} \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Trecând la limită în inegalitatea precedentă, deducem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = 0$.

g) Din **d)** deducem: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $-\frac{x^{4n-1}}{4n-1} \leq f_n(x) \leq 0$ și trecând la limită, obținem: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Tinând cont de imparitatea funcției f_n , rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$.

Atunci, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right) = \operatorname{arctg} x$, $\forall x \in [-1, 1]$.

h) Ca la **g)**, deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$.

Înlocuind n cu $n+1$ și integrând apoi relația din ipoteză pe intervalul $[0, 1]$, obținem concluzia.