

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....092***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât dreptele  $y = 2x + 1$  și  $y = ax + 5$  să fie paralele.
- (4p) b) Să se determine valoarea numărului  $\cos^2 2007\pi - \sin^2 2007\pi$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația cercului care are pe  $AB$  diametru unde  $A(-4, 0)$  și  $B(4, 4)$ .
- (4p) d) Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât vectorii  $\vec{v} = \vec{i} + a\vec{j} + \vec{k}$  și  $\vec{w} = b\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$  să fie coliniari.
- (2p) e) Să se determine modulul numărului complex  $(1+i)^8$ .
- (2p) f) Să se determine aria triunghiului  $ABC$  cu lungimile laturilor de 5,6,7.

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se calculeze media aritmetică a elementelor mulțimii  $P = \{11, 12, 13, \dots, 18\}$ .
- (3p) b) Să se determine câte progresii aritmetice de trei elemente cu rația strict pozitivă se pot forma cu elementele mulțimii  $P = \{11, 12, 13, \dots, 18\}$ .
- (3p) c) Să se afle câte numere naturale satisfac relația  $n^2 - 6n + 5 \leq 0$ .
- (3p) d) Să se determine câtul împărțirii polinomului  $f = X^6 - 1$  la polinomul  $g = X^2 + X + 1$ .
- (3p) e) Să se determine probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  să verifice relația  $3^n > 4n + 5$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^x + e^{-x}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ .
- (3p) c) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției  $f$ .
- (3p) d) Să se calculeze valoarea minimă a funcției  $f$  pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} \int_0^n f(t) dt$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}, \quad a^2 + b^2 = 1 \right\}$ , matricele

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } M(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se arate că  $I_2 \in G$  și  $M(x) \in G$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că dacă  $A, B \in G$  atunci  $A \cdot B \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că  $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$  pentru orice  $A, B \in G$ .
- (2p) d) Să se arate că dacă  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$ , atunci matricea  $A$  este inversabilă și  $A^{-1} = 2aI_2 - A$ .
- (2p) e) Să se arate că dacă  $A \in G$ , atunci există  $x \in [0, 2\pi)$  astfel încât  $A = M(x)$ .
- (2p) f) Utilizând formulele  $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$  și  $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$ ,  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , să se calculeze  $M^n(x)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se arate că există o matrice  $A \in G$  astfel încât mulțimea  $G(A) = \{A^n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$  să fie infinită.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Fie şirurile  $(I_n)_{n \geq 0}$ ,  $(a_n)_{n \geq 1}$ , cu  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx$ ,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx$ ,

$$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $I_0$  și  $I_1$ .
- (4p) b) Să se arate că  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .
- (4p) c) Să se arate că şirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  este monoton și mărginit.
- (2p) d) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .
- (2p) e) Să se arate că  $a_n = I_0 + (-1)^{n-1} I_n$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) f) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{4}$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n \cdot \left( \frac{\pi}{4} - a_n \right)$ .

## Varianta 92

### Subiectul I

a)  $a=2$ . b)  $\cos^2 2002\pi - \sin^2 2002\pi = \cos 2 \cdot 2002\pi = 1$ . c)  $AB = 4\sqrt{5} \Rightarrow R = 2\sqrt{5}$ .

Centrul cercului este mijlocul lui AB, C(0,2). Ecuația cercului este  $x^2 + (y-2)^2 = 20$ .

d)  $\frac{1}{b} = \frac{a}{3} = \frac{1}{1} \Rightarrow a = 3, b = 1$ . e)  $|(1+i)^8| = |1+i|^8 = \sqrt{2}^8 = 16$ .

f) Cu formula lui Heron obținem  $S = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$ .

### Subiectul II

1.a)  $\frac{11+12+\dots+18}{8} = \frac{8 \cdot (11+18)}{8 \cdot 2} = \frac{29}{2}$ . b) 12 progresii aritmetice cu trei elemente.

c)  $n \in \{1,2,3,4,5\}$ , deci 5 numere naturale satisfac relația dată.

d)  $f = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X^3 + 1) \Rightarrow q = (X - 1)(X^3 + 1)$ ;

e)  $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

2. a)  $f'(x) = e^x - e^{-x}$ . b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = f'(0) = 0$ . c)  $f''(x) = e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ , deci  $f'$  este strict crescătoare,  $f'(0) = 0$ , deci  $x_0 = 0$  este singurul punct de extrem local.

d)  $\min f = f(0) = 2$ . e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} \int_0^n f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n} = 1$ .

### Subiectul III

Fie  $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,  $\det X(a,b) = a^2 + b^2 = 1$ .

a)  $I_2 = X(1,0) \in G, M(x) = X(\cos x, \sin x) \in G$ .

b) Fie  $A=X(a,b), B=X(c,d) \in G$ . Avem

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}, \text{ și cum } (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1,$$

rezultă că  $A \cdot B \in G$ .

c) Calcul direct.

d) Din teorema Cayley-Hamilton obținem  $A^2 - 2aA + I_2 = 0$ , de unde

rezultă  $A^{-1} = 2aI_2 - A$ .

e) Din  $a^2 + b^2 = 1$  rezultă că există  $x \in [0, 2\pi)$  astfel ca  $a = \cos x, b = \sin x$ .

f)  $M^2(x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$ . Se arată prin inducție că

$$M^n(x) = \begin{pmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

g) Fie  $A = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$ . Rezultă  $G(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos n & \sin n \\ -\sin n & \cos n \end{pmatrix}, n \in N \right\}$ . Arătăm că elementele lui  $G(A)$  sunt distințe. Dacă ar exista două matrice din  $G(A)$  a.î.  $A^m = A^n$  cu  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $m \neq n$ , rezultă  $m = n + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow m - n = 2k\pi$ , contradicție cu faptul că  $\pi$  este irațional.

#### Subiectul IV

a)  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}; I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\tg^2 x + 1) - 1] dx = (\tg x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$ .

b)  $I_{n+1} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tg^{2n+2} x + \tg^{2n} x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg^{2n} x (\tg^2 x + 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg^{2n} x (\tg x)' dx = \frac{\tg^{2n+1} x}{2n+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+1}$ .

c)  $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg^{2n+2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg^{2n} x (\tg^2 x - 1) dx \leq 0$ , deoarece  $\tg^{2n} x \geq 0$ ,  
 $\tg^2 x - 1 \leq 0$  pentru  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , deci  $(I_n)_{n \geq 0}$  este descrescător. Evident  $0 < I_n \leq I_0, \forall n \in \mathbf{N}$ ,  
deci  $(I_n)_{n \geq 0}$  este mărginit.

d) Din punctul e) rezultă că  $(I_n)_{n \geq 0}$  este convergent, fiind monoton și mărginit. Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I, I \in \mathbf{R}$ . Trecând la limită în relația de la b), obținem  $I + I = 0 \Rightarrow I = 0$ .

e) Din relația de la b) obținem  $I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}, n \geq 1$ . Rezultă că

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \left( \frac{1}{2n-3} - I_{n-2} \right) = \dots = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \dots + (-1)^n \cdot 1 + (-1)^n \cdot I_0.$$

Rezultă  $a_n = I_0 + (-1)^{n-1} \cdot I_n, n \geq 1$ .

f) Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ , din punctul e) rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = I_0 = \frac{\pi}{4}$ .

g) Din relația de la e) obținem  $(-1)^n \left( \frac{\pi}{4} - a_n \right) = I_n$  și  $(-1)^n n \left( \frac{\pi}{4} - a_n \right) = nI_n$ . Pe de altă

parte din punctul b) și monotonia lui  $(I_n)$  obținem

$$2I_n \geq I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1} \text{ și } 2I_{n+1} \leq I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}, \text{ deci } \frac{1}{2(2n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(2n-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(2n-1)}. \text{ Rezultă că } \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{4}.$$