

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**

**Varianta ....091**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\sin 1 - i \cos 1$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(4,3,2)$  la planul  $x + 2y + 3z + 6 = 0$ .
- (4p) c) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$  și  $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$
- (4p) d) Să se arate că  $\sin 1 > \cos 1$ .
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(1, 2, 0)$ ,  $C(2, 0, 1)$  și  $D(4, 3, 2)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe  $(-1+i)^{12} = a + bi$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se arate că  $\log_3 4 > \log_4 3$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $\hat{x} \in \mathbf{Z}_{12}$  să verifice relația  $\hat{x}^2 = \hat{1}$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x^3 + x + 1$ , are inversă  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , să se calculeze  $g(5)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^x + 2 \cdot 9^x = 3$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\sqrt{110}$  cu o zecimală exactă.

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2^x - x - 1$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .

- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .

- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră polinomul  $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ , unde  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , cu rădăcinile

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$ . Notăm  $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}^*$ ,  $S_0 = 3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$  și

$\Delta = \det(A \cdot A^T)$ , unde prin  $A^T$  am notat transpusa matricei  $A$ .

- (4p) a) Să se arate că  $\det(A) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $S_1 = -a$  și  $S_2 = a^2 - 2b$ .
- (4p) c) Să se arate că,  $S_{n+3} + aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .
- (2p) d) Să se calculeze  $S_3$  și  $S_4$  în funcție de  $a, b$  și  $c$ .
- (2p) e) Să se verifice că  $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}$ .
- (2p) f) Să se calculeze determinantul  $\Delta = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}$  în funcție de  $a, b$  și  $c$ .
- (2p) g) Știind că  $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$ ,  $\forall X, Y \in M_3(\mathbf{C})$ , să se arate că  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$  dacă și numai dacă  $\Delta \geq 0$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^a$ , unde  $a \in \mathbf{R}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că există  $c(a)$  (care depinde de  $a$ ),  $c(a) \in (17, 19)$  și  $d(a)$  (care depinde de  $a$ ),  $d(a) \in (1974, 1976)$ , astfel încât  $19^a - 17^a = 2a(c(a))^{a-1}$  și  $1976^a - 1974^a = 2a(d(a))^{a-1}$ .
- (2p) c) Să se arate că pentru orice funcții  $g : \mathbf{R} \rightarrow (17, 19)$  și  $h : \mathbf{R} \rightarrow (1974, 1976)$ , ecuația  $x(g(x))^{x-1} = x(h(x))^{x-1}$  are numai soluțiile  $x = 0$  și  $x = 1$ .
- (2p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $17^x + 1976^x = 19^x + 1974^x$ .
- (4p) e) Să se arate că  $\sqrt{19} + \sqrt{1974} > \sqrt{17} + \sqrt{1976}$ .
- (2p) f) Să se arate că  $\frac{18}{\ln 19} + \frac{1973}{\ln 1974} > \frac{16}{\ln 17} + \frac{1975}{\ln 1976}$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\frac{18 \cdot 19}{\ln 19} + \frac{1973 \cdot 1974}{\ln 1974} < \frac{16 \cdot 17}{\ln 17} + \frac{1975 \cdot 1976}{\ln 1976}$ .

## Varianta 91

**Subiectul I.**

- a)  $|\sin 1 - i \cos 1| = 1$
- b)  $\frac{11\sqrt{14}}{7}$ .
- c)  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3$ .
- d)  $\sin 1 > \cos 1 \Leftrightarrow \tan 1 > 1 \Leftrightarrow \tan 1 > \tan \frac{\pi}{4}$ , adevărat.
- e)  $V_{OBCD} = 3$ .
- f)  $a = -64$  și  $b = 0$ .

**Subiectul II.**

**1.**

- a)  $\log_3 4 > \log_3 3 = 1 = \log_4 4 > \log_4 3$ .
- b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .
- c)  $g(5) = 1$ .
- d)  $x = 0$ .
- e)  $\sqrt{110} \approx 10,4$

**2.**

- a)  $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- b)  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}$ .
- c)  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \cdot \ln 2 - 1$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2$ .

**Subiectul III.**

a) Calcul direct.

b) Se folosesc relațiile lui Viète:

c)  $x_1$  rădăcină a lui  $f \Leftrightarrow x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \Rightarrow x_1^{n+3} + a \cdot x_1^{n+2} + b \cdot x_1^{n+1} + c \cdot x_1^n = 0$ .

Analog obținem  $x_2^{n+3} + a \cdot x_2^{n+2} + b \cdot x_2^{n+1} + c \cdot x_2^n = 0$  și  $x_3^{n+3} + a \cdot x_3^{n+2} + b \cdot x_3^{n+1} + c \cdot x_3^n = 0$ .

Adunând ultimele trei egalități rezultă  $S_{n+3} + aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

**d)**  $S_3 = a^3 + 3ab - 3c$ , iar  $S_4 = a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$ .

**e)** Se verifică prin calcul direct.

$$\mathbf{f)} \Delta = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & b \\ S_1 & S_2 & -3c \\ b & -3c & b^2 - 2ac \end{vmatrix} = a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 + 18abc - 27c^2.$$

**g)** “ $\Rightarrow$ ” Considerăm  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ . Atunci  $\det(A) \in \mathbf{R}$ , deci  $(\det(A))^2 \geq 0$ .

Mai mult,  $\Delta = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = (\det(A))^2 \geq 0$ .

“ $\Leftarrow$ ” Avem  $\Delta = (\det(A))^2 \stackrel{a)}{=} ((x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2 \stackrel{ip}{\geq} 0$  (1)

Presupunem că  $f$  nu are toate rădăcinile reale.

Atunci, rădăcinile sale sunt de forma  $\begin{cases} x_1 = -2d - a \\ x_2 = d + e \cdot i, \text{ cu } d, e \in \mathbf{R}, e \neq 0 \\ x_3 = d - e \cdot i \end{cases}$

iar (1)  $\Leftrightarrow -4e^2((3d - a)^2 + e^2) \geq 0$ , fals.

#### Subiectul IV.

**a)**  $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ ,  $\forall x > 0$ .

**b)** Funcția  $f$  este funcție Rolle pe fiecare dintre intervalele  $[17, 19]$  și  $[1974, 1976]$  și conform teoremei lui Lagrange, există  $c(a) \in (17, 19)$  și  $d(a) \in (1974, 1976)$ , astfel încât  $\frac{f(19) - f(17)}{19 - 17} = f'(c(a))$  și  $\frac{f(1976) - f(1974)}{1976 - 1974} = f'(d(a))$ .

**c)** Ecuația din enunț are soluțiile  $x = 0$  și  $x = 1$ .

Pentru  $x > 1$ , avem  $(g(x))^{x-1} < 19^{x-1} < 1974^{x-1} < (h(x))^{x-1}$ , deci nu există soluții, iar pentru  $x < 1$ , rezultă analog că nu avem soluții.

**d)** Pentru  $x \in \mathbf{R}$  și funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(t) = t^x$ , din **b)** deducem că există  $c(x) \in (17, 19)$  și  $d(x) \in (1974, 1976)$ , astfel încât  $19^x - 17^x = 2x(c(x))^{x-1}$  și  $1976^x - 1974^x = 2x(d(x))^{x-1}$ .

Ecuația din enunț devine:  $2x(c(x))^{x-1} = 2x(d(x))^{x-1}$  și din **c)** obținem că singurele soluții ale ecuației (3) sunt  $x = 0$  și  $x = 1$ .

**e)** Se demonstrează prin calcul direct, ridicând la patrat inegalitatea, sau alegând  $x = \frac{1}{2}$  și raționând ca la demonstrația punctului **c)**.

**f)** Din **b)** deducem că pentru  $x \in [0, 1]$  avem  $19^x + 1974^x \geq 17^x + 1976^x$  și integrând această inegalitate pe intervalul  $[0, 1]$  obținem concluzia.

**g)** Pentru  $x \in [1, 2]$ , obținem  $19^x + 1974^x \leq 17^x + 1976^x$ , și integrând această inegalitate pe intervalul  $[1, 2]$  deducem concluzia.