

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
**Varianta ....090**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $(2 + 3i)^2$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $C(-1, -1)$  la dreapta  $x + y = 0$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la hiperbola  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ , dusă prin punctul  $P(-5, 4)$ .
- (4p) d) Să se determine  $a > 0$  astfel încât punctul  $P(-4, -3)$  să se afle pe cercul  $x^2 + y^2 = a$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(-3, 3)$ ,  $B(-5, 5)$  și  $C(-1, -1)$ .
- (2p) f) Să se calculeze produsul  $(\tan 1^\circ - \tan 7^\circ) \cdot (\tan 2^\circ - \tan 6^\circ) \cdot \dots \cdot (\tan 7^\circ - \tan 1^\circ)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$ .
- (3p) b) Să se calculeze expresia  $C_6^1 - C_6^2 + C_6^4$ .
- (3p) c) Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^4 - x$ . Să se calculeze  $(f \circ f)(0)$ .
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, \dots, 5\}$ , să verifice relația  $3^n \geq 8n$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma elementelor din grupul  $(\mathbf{Z}_{18}, +)$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 1 + \ln(x^2 + 1)$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f'(x) dx$ .
- (3p) c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se arate că  $f(x) \geq 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și mulțimile

$$H = \left\{ X \in M_2(\mathbf{R}) \mid X^2 = X \right\} \text{ și } M = \left\{ aA + bB + cC + dD \mid \forall a, b, c, d \in \mathbf{R}, \forall A, B, C, D \in H \right\}.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $E \in H$  și  $I_2 \in H$ .
- (4p) b) Să se găsească o matrice  $P \in H$  astfel încât  $\text{rang}(P) = 1$  și o matrice  $Q \in H$  astfel încât  $\text{rang}(Q) = 2$ .
- (4p) c) Să se verifice că,  $\forall a, b \in \mathbf{R}$  matricele  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$  sunt din mulțimea  $H$ .
- (2p) d) Să se arate că dacă  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ , atunci  $a+d \in \{0, 1, 2\}$ .
- (2p) e) Să se arate că dacă  $B \in H$  este o matrice inversabilă, atunci  $B = I_2$ .
- (2p) f) Să se arate că  $M = M_2(\mathbf{R})$ .
- (2p) g) Să se arate că matricea  $F$  nu se poate scrie ca o sumă finită de matrice din mulțimea  $H$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  și  $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  și funcția  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , unde  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ .

- (4p) a) Să se arate că  $h(x) \geq 1 - x^2$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 h^2(x) dx$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $t^2 f^2(x) - 2t f(x) g(x) + g^2(x) \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$  și  $\forall x \in [a, b]$ .
- (2p) d) Integrând inegalitatea de la punctul c), să se arate că  $t^2 \int_a^b f^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ .
- (2p) e) Să se deducă inegalitatea  $\left( \int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)$ .
- (2p) f) Utilizând inegalitatea de la punctul e) să se arate că, dacă  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție continuă, atunci  $\left( \int_0^1 u(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 u^2(x) dx$ .
- (2p) g) Să se arate că aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției  $h$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x = 0$  și  $x = 1$ , este un număr real din intervalul  $(0,90; 0,95)$ .

### Varianta 090

**Subiectul I**

- a) 13. b)  $\sqrt{2}$ . c)  $x + y + 1 = 0$ . d)  $a = 25$ . e) 2. f) 0.

**Subiectul II**

1. a)  $x = 0$ . b) 6. c) 0. d)  $\frac{3}{5}$ . e)  $\hat{9}$ .

2. a)  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . b)  $\ln(x^2 + 1)|_0^1 = \ln 2$ . c)  $f$  strict crescătoare pe  $[0, \infty)$  și  $f$  strict descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$ . d)  $f'(1) = 1$ . e)  $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ .

**Subiectul III**

a)  $E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , deci  $E \in H$ .  $I^2 = I_2$ , deci  $I_2 \in H$ ;

b)  $P = E \in H$  și  $\text{rang}(P) = 1$ ,  $Q = I_2 \in Q$  și  $\text{rang}(Q) = 2$ ;

c)  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , deci  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$ ;

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ , deci  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in H$ ;

d) Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ . Atunci  $A^2 = A$ , deci  $a^2 + bc = a$ ,  $b(a+d) = b$ ,  $c(a+d) = c$ ,  $bc + d^2 = d$ .

Obținem  $a^2 - d^2 = a - d$ , deci  $(a+d)(a-d) = a - d$ . Pentru  $a \neq d$  avem  $a + d = 1$ .

Pentru  $a=d$  egalitățile devin  $a^2 + bc = a$ ,  $2ab = b$ ,  $2ac = c$ . Dacă  $b=0$  avem  $a=0$  sau  $a=1$ , iar dacă

$b \neq 0$  avem  $a = \frac{1}{2}$  și din  $a=d$  obținem  $a+d=0$  sau  $a+d=2$  sau  $a+d=1$ .

e) Din  $B \in H$  avem  $B^2 = B$ .  $B$  fiind inversabilă, există  $B^{-1}$ . Înmulțind egalitatea  $B^2 = B$  cu  $B^{-1}$  obținem  $B = I_2$ .

f) Evident  $M \subseteq M_2(\mathbf{R})$ . Demonstrăm că  $M_2(\mathbf{R}) \subseteq M$ . Fie

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha - 2 - \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} + \delta I_2 + (\alpha - 2 - \delta)E \in M$$

g) Presupunem că există  $A_1, A_2, \dots, A_n \in H$  astfel ca  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = F$ .

$\text{Tr}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \text{Tr}(A_1) + \text{Tr}(A_2) + \dots + \text{Tr}(A_n) \in \mathbf{Z}$  (din d).  $\text{Tr}F = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} \notin \mathbf{Z}$ . Deci  $F$

nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice din mulțimea  $H$ .

## Subiectul IV

a)  $h(x) \geq 1 - x^9, \forall x \in [0,1] \Leftrightarrow \sqrt{1-x^9} \geq 1 - x^9, \forall x \in H \Leftrightarrow 1 - x^9 \geq (1-x^9)^2$ , adevărat pt. că  $1 - x^9 \in [0,1]$ ;

$$b) \int_0^1 h^2(x) dx = \int_0^1 (1-x^9) dx = x - \frac{x^{10}}{10} \Big|_0^1 = \frac{9}{10};$$

c) Inegalitatea este echivalentă cu  $(tf(x) - g(x))^2 \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in [a,b]$ , care este adevărată.

d) Relația se obține integrând inegalitatea de la punctul c) pe intervalul  $[0,1]$  în raport cu  $x$ .

e) Relația de la punctul d) are loc dacă și numai dacă

$$\Delta = 4 \left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow \left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

Ea este varianta integrală a inegalității lui Cauchy-Buniakovski.

$$f) \left( \int_0^1 u(x) dx \right)^2 = \left( \int_0^1 1 \cdot u(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 u^2(x) dx = \int_0^1 u^2(x) dx;$$

$$g) \text{Aria căutată este } A = \int_0^1 h(x) dx. \text{Conform pct. a) avem } \int_0^1 h(x) dx > \int_0^1 (1-x^9) dx = 0,9.$$

Pe de altă parte, conform pct. f) avem  $\left( \int_0^1 h(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 h^2(x) dx = 0,9$ , deci

$$\int_0^1 h(x) dx \leq \sqrt{0,9} < 0,95.$$