EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….089**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate *Oxy,* se consideră punctele $A_n(n,0)$ şi $B_n(0,n)$, unde $n \in \{1,2,3,4\}$ şi se notează cu M mulțimea formată din toate aceste 8 puncte.

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele A_2 şi B_2 .

(4p) **b)** Să se arate că punctele A_1 şi B_3 sunt pe dreapta $3x + y - 3 = 0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația paralelei prin B_1 la dreapta A_1B_3 .

(4p) **d)** Să se calculeze aria triunghiului $A_1A_4B_4$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\sin\left(A_1\hat{A_2}B_2\right)$.

(2p) **f)** Să se determine câte drepte trec prin cel puțin două puncte din mulțimea M .

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $a+b$ ştiind că numerele $3,a,4,b,5$ sunt , în această ordine , în progresie aritmetică.

(3p) **b)** Să se determine numărul natural c pentru care $\dfrac{(c+5)!}{(c+4)!} = 8$.

(3p) **c)** Să se determine numărul soluțiilor din $\mathbf{Z}_5$ ale ecuației $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{4}$.

(3p) **d)** Să se calculeze numărul funcțiilor $f:\{3,4,5\} \to \{3,4,5\}$ pentru care $f(3)$ este număr impar .

(3p) **e)** Să se determine în câte moduri se poate alcătui o echipă de cercetare formată din 2 biologi şi 3 chimişti, dacă avem la dispoziție 3 biologi şi 4 chimişti.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0,\infty)$.

(3p) **b)** Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se compare numerele $a = f(\sqrt{3})$ şi $b = f(\sqrt{5})$

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulţimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ precum şi submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \, z, w \in \mathbf{C} \right\}$, unde prin $\overline{z}$ am notat conjugatul numărului complex z.

(4p) **a)** Să se verifice că $I_2 \in G$ şi $O_2 \in G$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $z, w \in \mathbf{C}$ şi $|z|^2 + |w|^2 = 0$, atunci $z = w = 0$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $P, Q \in G$, atunci $P \cdot Q \in G$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $D \in G$, $D \neq O_2$, atunci D este matrice inversabilă şi $D^{-1} \in G$.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $X \in G$, cu proprietatea că $X \cdot C \neq C \cdot X$, unde $C = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A, B \in G$ şi $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

(2p) **g)** Să se arate că mulţimea G, împreună cu operaţiile de adunare şi de înmulţire a matricelor, determină o structură de corp necomutativ.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general

$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, respectiv $b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $a_2 - b_2$.

(4p) **b)** Să se arate că $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se studieze monotonia şirului $(b_n)_{n\geq 1}$.

(2p) **d)** Să se arate că $1 - x + x^2 - \ldots + x^{2n-2} - x^{2n-1} = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \geq 0$.

(2p) **e)** Să se arate că $a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty$.

Matematică informatică
Varianta 89

Subiectul I.

a) $A_2B_2 = 2\sqrt{2}$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) $3x + y - 1 = 0$.

d) Aria triunghiului $A_1A_4B_4$ este $S = 6$.

e) $\sin\left(A_1\hat{A}_2B_2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) 18.

Subiectul II.

1.

a) $a + b = 8$.

b $c = 3$.

c) Ecuația are o singură soluție.

d) Există 18 funcții ca în enunț, cu $f(3)$ impar.

e) Există 12 echipe ca în enunț.

2.

a) $f'(x) = -\frac{3x^2 - 4x + 5}{x^6}$, $\forall\, x > 0$.

b) Dreapta $Oy : x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta la graficul funcției iar dreapta $Ox : y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcției.

c) $f'(x) < 0$, $\forall\, x > 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

d) $f\left(\sqrt{3}\right) > f\left(\sqrt{5}\right)$.

e) $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{61}{192}$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) Considerăm $z, w \in \mathbf{C}$, astfel încât $|z|^2 + |w|^2 = 0$. Deoarece $|z|, |w| \in [0, \infty)$, egalitatea precedentă implică $|z| = |w| = 0$, deci $z = w = 0$.

c) Calcul direct.

d) Dacă $D = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in G$, $D \neq O_2$, atunci rezultă $\det(D) = |z|^2 + |w|^2 \neq 0$, şi $D^{-1} = \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} \cdot \begin{pmatrix} \overline{z} & -w \\ -(-\overline{w}) & \overline{\overline{z}} \end{pmatrix} \in G$.

e) De exemplu, $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ are proprietatea cerută..

f) Considerăm $A, B \in G$ astfel încât $A \cdot B = O_2$.

Dacă A este inversabilă, înmulțind la stânga egalitatea precedentă cu A^{-1} obținem $B = O_2$. Dacă $\det(A) = 0$, din **b)** rezultă că $A = O_2$.

g) Din **b)** obținem că G este stabilă față de operația de înmulțire uzuală a matricelor, iar din **e)** că înmulțirea nu este comutativă pe D.

Se verifică uşor axiomele corpului şi rezultă că $(G, +, \cdot)$ este un corp necomutativ.

Subiectul IV.

a) $a_2 - b_2 = 0$.

b) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) =$

$= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right) + b_n - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right) = b_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$.

c) $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0, \ \forall n \in \mathbf{N}^*$, deci şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

d) Evident.

e) Se arată prin calcul direct, folosind punctul **d)**.

f) Avem $0 < \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx < \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$ şi obținem $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx = 0$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$.

g) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, notăm $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Şirul $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător, deci are limită în $\overline{\mathbf{R}}$.

Presupunem că $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbf{R}$. Atunci, avem $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} (\alpha_{2n} - \alpha_n) = 0$

Însă, $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} a_n \overset{f)}{=} \ln 2$, contradicție. Aşadar $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right) = \infty$.