

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta088

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3-i}{3+i}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,0,1)$ la planul $3x+2y+z+4=0$.
- (4p) c) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât punctul $P(a,2)$ să se afle pe elipsa $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(1, 2, 3)$, $M(2, 3, 4)$ și $N(3, 4, 5)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze cosinusul unghiului format de vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$(\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ)^{180} = a + bi .$$

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze expresia $C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 + \dots + C_{10}^{10}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $2^n + 3^n > 5^n$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 2$, are inversa $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(5)$.
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $x^3 + 3x - 4 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f = X^3 + X^2 + X \in \mathbf{C}[X]$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + \sin x - \cos x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$.

- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^3}{4x^4 + 5} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_2)$ se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și submulțimea $N = \{X \in M_2(\mathbf{Z}_2) \mid X^2 = O_2\}$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $O_2 \in N$ și $A \in N$.
- (4p) b) Să se demonstreze că $I_2 \notin N$.
- (4p) c) Să se arate că, dacă $B \in N$, $B = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$, atunci $\hat{a} + \hat{d} = \hat{0}$ și $\hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c} = \hat{0}$.
- (2p) d) Să se găsească o matrice $C \in M_2(\mathbf{Z}_2)$ cu proprietățile $\det(C) = \hat{0}$ și $C \notin N$.
- (2p) e) Să se determine numărul elementelor mulțimii $M_2(\mathbf{Z}_2)$.
- (2p) f) Să se determine numărul elementelor mulțimii N .
- (2p) g) Să se găsească o matrice $X \in M_2(\mathbf{Z}_2)$ care **nu** se scrie ca o sumă de elemente din mulțimea N .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ și $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$ și $F(0)$.
- (4p) b) Să se verifice că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția F este convexă pe intervalul $[0, \infty)$ și este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$.
- (2p) d) Să se arate că $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și $F(-x) = -F(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$
- (2p) f) Să se arate funcția F este bijectivă.
Notăm cu $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, inversa funcției F și cu $a = g(1)$.
- (2p) g) Să se arate că $\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2}(f(a) - 1)$.

Varianta 88

Subiectul I

- a) 1. b) $\frac{4\sqrt{14}}{7}$. c) $a = 0$. d) $L\vec{M}(1,1,1)$, $M\vec{N}(1,1,1) \Rightarrow L, M, N$ coliniare. e) $\frac{41\sqrt{2}}{58}$.
 f) $a = -1$. $b = 0$.

Subiectul II

1. a) 512. b) $\frac{1}{5}$. c) $g(5) = 1$. d) $x = 1$. e) -1.
2. a) $f'(x) = 2 + \cos x + \sin x, \forall x \in \mathbf{R}$. b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = (x^2 - \cos x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$.
- c) $f'(x) = 2 + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 2 - \sqrt{2} > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict crescatoare pe \mathbf{R} .
- d) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. e) $\frac{1}{16} \ln(4x^4 + 5) \Big|_0^1 = \frac{1}{16} \ln \frac{9}{5}$.

Subiectul III

- a) $O_2^2 = O_2$, deci $O_2 \in N$, $A^2 = O_2$, deci $A \in N$.
- b) $I_2^2 = I_2 \neq O_2$, deci $I_2 \notin N$;
- c) $B^2 = O_2 \Leftrightarrow \hat{a}^2 + \hat{b} \cdot \hat{c} = \hat{0}, (\hat{a} + \hat{d}) \cdot \hat{b} = \hat{0}, (\hat{a} + \hat{d}) \cdot \hat{c} = \hat{0}, \hat{d}^2 + \hat{b} \cdot \hat{c} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{a}^2 + \hat{b} \cdot \hat{c} = \hat{0}$.
 $(\hat{a} + \hat{d}) \cdot \hat{b} = \hat{0}; (\hat{a} + \hat{d}) \cdot \hat{c} = \hat{0}, (\hat{a} - \hat{d}) \cdot (\hat{a} + \hat{d}) = \hat{0}$. Daca $\hat{a} + \hat{d} \neq \hat{0}$ ($\hat{a} + \hat{d} = \hat{1}$) atunci $\hat{a} = \hat{d}$, $\hat{b} = \hat{c} = \hat{0}$ si din $\hat{a}^2 = \hat{0} \Rightarrow \hat{a} = \hat{0}$ deci $A = O_2$. Daca $\hat{a} + \hat{d} = \hat{0}$ ramane relatia $\hat{a}^2 + \hat{b} \cdot \hat{c} = \hat{0}$ si cum $\hat{a}^2 = \hat{a} \cdot (-\hat{d}) \Rightarrow \hat{a} \cdot \hat{d} - \hat{b} \cdot \hat{c} = \hat{0}$.

d) $C = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

e) $2^4 = 16$.

f) $\hat{a} \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $\hat{d} = -\hat{a} \in \{\hat{1}, \hat{0}\}$. Daca $\hat{a} = \hat{1} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Daca $\hat{a} = \hat{0} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$. Deci N contine 4 elemente.

g) Matricea $D = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ are urma $\hat{a} + \hat{d} = \hat{1}$ si toate matricele din M au urma $\hat{0}$. Deci nu poate fi scrisa ca suma de elemente din M.

Subiectul IV

- a) $f(0) = 1$. $F(0) = 0$.

- b) f continua, deci admite primitive, si fie G o primitive a ei. Atunci $F(x) = G(t)|_0^x = G(x) - G(0)$, si din G derivabila avem G continua, deci $G - G(0) = F$ derivabila si $F'(x) = G'(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.
- c) $F''(x) = f'(x) = 2xe^{x^2}, \forall x \in \mathbf{R}$, deci $F''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0)$, de unde F concava pe $(-\infty, 0]$ si $F''(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$, de unde F convexa pe $[0, \infty)$.
- d) $f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$. $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt$, notam $y = -t, dy = -dt$, iar pentru $t = 0, y = 0$ si pentru $t = -x, y = x$. Atunci $F(-x) = -\int_0^x f(y)dy = -\int_0^x f(y)dy = -F(x), \forall x \in \mathbf{R}$.
- e) Pentru $x > 1$ $\int_0^x e^{t^2} dt > \int_1^x e^{t^2} dt > \int_1^x e^t dt = e^x - e$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - e) = \infty$, folosind criteriul majorarii, avem $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$.
- f) F continua si din d), e), avem $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$, deci $\text{Im } F = \mathbf{R}$, coincide cu codomeniul si deci functia este surjectiva. Din $F'(x) = f(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, obtinem ca F este strict crescatoare pe \mathbf{R} , deci F este injective. In consecinta F este bijectiva.
- g) Fie $t = g(x)$ ($t = F^{-1}(x)$), deci $x = F(t)$, de unde $dx = F'(t)dt$. Pentru $x = 0$ din $F(t) = 0$ obtinem $t = 0$, iar pentru $x = 1$ $t = g(1) = a$:

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^a tF'(t)dt = \int_0^a t \cdot f(t)dt = \int_0^a t \cdot e^{t^2} dt = \frac{1}{2} e^{t^2} \Big|_0^a = \frac{1}{2} (e^{a^2} - 1) = \frac{1}{2} (f(a) - 1).$$