

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....087***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\sqrt{2} + \sqrt{3}i$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(1, 2, 3)$  la planul  $x + 2y + 3z - 4 = 0$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la elipsa  $x^2 + 2y^2 = 12$  dusă prin punctul  $P(2, 2)$ .
- (4p) d) Să se arate că punctele  $L(1, 2)$ ,  $M(2, 3)$  și  $N(3, 4)$  sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(1, 2, 1)$ ,  $C(2, 1, 1)$  și  $D(1, 2, 3)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{2+3i}{4+5i} = a+bi$$

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 1 și rația este 2, să se calculeze termenul al douăzecilea.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$  să verifice relația  $\hat{x}^2 = \hat{x}$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^5 + 1$  are inversa  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , să se calculeze  $g(0) + g(-31)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x^2 + 7) = \log_2(2x^2 + 3)$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului  $f = X^3 - X - 24$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sin x + \cos x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^{\pi} f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , multimile

$$I(A) = \{g(A) \mid g \in \mathbf{Q}[X]\} \text{ și } J(A) = \{aA + bI_2 \mid a, b \in \mathbf{Q}\} \text{ și polinomul } f = X^2 - X + 1.$$

(Dacă avem polinomul  $g = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ , atunci prin matricea  $g(A)$  înțelegem  $g(A) = a_0I_2 + a_1A + \dots + a_nA^n$ .)

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- (4p) b) Să se calculeze rangul matricei  $A$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $f(A) = O_2$ .
- (2p) d) Să se arate că matricea  $A$  este inversabilă și să se calculeze inversa sa.
- (2p) e) Să se arate că  $I(A) = J(A)$ .
- (2p) f) Să se arate că polinomul  $f$  nu se poate scrie ca produs de polinoame de gradul întâi cu coeficienți în  $\mathbf{Q}$ .
- (2p) g) Să se arate că orice matrice nenulă din  $J(A)$  este inversabilă și inversa sa este tot în  $J(A)$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^{-x^2}$  și  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f(0)$  și  $F(0)$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se arate că funcția  $F$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se arate că funcția  $F$  este concavă pe intervalul  $[0, \infty)$  și este convexă pe intervalul  $(-\infty, 0]$ .
- (2p) e) Să se arate că  $e^x \geq x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) f) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că  $f(x) \leq \frac{1}{x^2 + 1}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se arate că sirul  $(F(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent.

## Varianta 87

### Subiectul I.

- a)  $|\sqrt{2} + \sqrt{3}i| = \sqrt{5}$ .
- b)  $\frac{5\sqrt{14}}{7}$ .
- c) Ecuația tangentei căutată este  $x + 2y - 6 = 0$ .
- d) Punctele  $L, M, N$  sunt coliniare, deoarece  $\overrightarrow{LN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$ .
- e)  $V_{ABCD} = \frac{1}{3}$ .
- f)  $a = \frac{23}{41}, b = \frac{2}{41}$ .

### Subiectul II.

1.

- a)  $a_{20} = 2^{19}$ .
- b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{2}{5}$ .
- c)  $g(0) + g(-31) = -3$ .
- d)  $x \in \{-2, 2\}$ .
- e)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ .

2.

- a)  $f'(x) = \cos x - \sin x, x \in \mathbf{R}$ .
- b)  $\int_0^\pi f(x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^\pi = 2$ .
- c)  $f''(x) < 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , deci  $f$  este concavă pe  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \cos 1 - \sin 1$ .
- e)  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \cdot \ln 2$ .

### Subiectul III.

- a)  $\det(A) = 1$ .

b)  $\text{rang}(A)=2$ .

c) Calcul direct.

d)  $\det(A)=1 \neq 0$ , deci  $A$  este inversabilă și  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

e) „ $\supseteq$  Considerăm  $M \in J(A)$ ,  $M = aA + bI_2$ , cu  $a, b \in \mathbf{Q}$  și polinomul  $g \in \mathbf{Q}[X]$ ,  $g(X) = aX + b$ . Avem că  $g(A) = M$ , deci  $M \in I(A)$ .

„ $\subseteq$  Considerăm  $M \in I(A)$ , deci există  $g \in \mathbf{Q}[X]$  astfel încât  $g(A) = M$ .

Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice  $q \in \mathbf{Q}[X]$  și  $a, b \in \mathbf{Q}$  astfel încât  $g = (X^2 - X + 1) \cdot q + aX + b$ . Obținem  $M = g(A) = aA + b \cdot I_2 \in J(A)$

f) Se demonstrează prin reducere la absurd.

g) Observăm că pentru  $a, b \in \mathbf{Q}$ , avem  $aA + bI_2 = O_2 \Leftrightarrow a = b = 0$ .

Se consideră  $M \in J(A)$ ,  $M = aA + bI_2$ , cu  $a, b \in \mathbf{Q}$ , astfel ca  $M \neq O_2$ , deci astfel ca  $a \neq 0$  sau  $b \neq 0$  și se demonstrează că există  $N \in J(A)$ ,  $N = cA + dI_2$ , cu  $c, d \in \mathbf{Q}$ , astfel încât  $c \neq 0$  sau  $d \neq 0$  și  $MN = NM = I_2$ .

#### Subiectul IV.

a)  $f(0)=1$  și  $F(0)=0$ .

b) Funcția  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  este primitiva funcției  $f$  pentru care  $F(0)=0$ . Rezultă că  $F'(x)=f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

c)  $F'(x)=e^{-x^2} > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci  $F$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .

d) Evident, ținând cont de semnul funcției  $F''$ .

e) Considerăm funcția  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x)=e^x - x - 1$ , derivabilă pe  $\mathbf{R}$ , cu  $g'(x)=e^x - 1$ . Avem  $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \infty)$ .

Rezultă că  $x=0$  este un punct de minim global pentru  $g$ .

Așadar  $g(x) \geq g(0)=0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , rezultând inegalitatea cerută.

f) Din e) obținem că  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x)=e^{-x^2}=\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2+1}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

g) Deoarece  $F$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ , există  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ .

Considerăm  $x > 1$ .  $F(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = \alpha + \int_1^x f(t) dt$ .

Din f) avem că  $f(t) \leq \frac{1}{t^2+1}$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$  (1)

Se integrează (1) pe intervalul  $[0, 1]$  și pe intervalul  $[1, x]$  și se deduce concluzia.