

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta086

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

Se consideră dreapta $(d): 3x + 2y - 1 = 0$ și punctele $A(1, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, 2)$.

- (4p) a) Să se precizeze care dintre punctele A , B , C nu sunt situate pe dreapta (d) .
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) c) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se calculeze distanța de la punctul B la dreapta $3x + 2y - 1 = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.
- (2p) f) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $y = mx + n$ să treacă prin punctul B și să fie perpendiculară pe dreapta d .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$ să fie situat în intervalul $(-1, 1)$.
- (3p) b) Să se rezolve în \mathbb{Z}_4 ecuația $\hat{x}^2 + \hat{3}\hat{x} + \hat{2} = \hat{0}$.
- (3p) c) Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) d) Știind că $\ln 3 = a$ și $\ln 2 = b$, să se arate că $\log_2 3 = \frac{a}{b}$.
- (3p) e) Să se arate că numărul $z = 1 - i$ verifică egalitatea $z^3 = 2(z^2 - z)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 2^{-x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 13} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_3, O_3, A, B \in M_3(C)$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, cu $f(x) = \det(B - xI_3)$, având forma algebrică

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (cu \quad a, b, c, d \in \mathbf{C}).$$

Considerăm cunoscut că $f(B) = aB^3 + bB^2 + cB + dI_3 = O_3$.

- (4p) a) Să se determine matricea A^2 .
- (4p) b) Să se arate că pentru orice $z \in \mathbf{C}$, determinantul matricei $X(z) = I_3 + zA$ este egal cu 1.
- (4p) c) Să se demonstreze că $I_3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$.
- (2p) d) Să se arate că matricea $X(1) = I_3 + A$ este inversabilă și să se precizeze inversa sa.
- (2p) e) Să se determine o matrice $B \neq O_3$ pentru care $AB = O_3$.
- (2p) f) Să se arate că matricea $X = I_3 + nzA + \frac{n(n-1)}{2}z^2A^2$ este inversabilă $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall z \in \mathbf{C}$.
- (2p) g) Să se arate că, dacă $B \in M_3(\mathbf{C})$ și $\det(I_3 + zB) = 1$ pentru orice $z \in \mathbf{C}$, atunci $B^3 = O_3$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arctg x$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general

$$a_n = \arctg \frac{1}{1+1+1^2} + \arctg \frac{1}{1+2+2^2} + \dots + \arctg \frac{1}{1+n+n^2}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că $g'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $\int_x^{x+1} \frac{1}{t^2+1} dt = \arctg \frac{1}{1+x+x^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x))$.
- (2p) f) Să se arate că $a_n = \arctg(n+1) - \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{1}{1+1+1^2} + \arctg \frac{1}{1+2+2^2} + \dots + \arctg \frac{1}{1+n+n^2} \right)$.

Varianta 86

Subiectul I.

- a) $A, C \in (d)$, iar $B \notin (d)$.
- b) $S_{ABC} = 1$.
- c) Perimetru triunghiului ABC este $P = 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{13}$.
- d) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.
- e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$.
- f) $m = \frac{2}{3}$ și $n = \frac{5}{3}$.

Subiectul II.

1.

- a) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{5}$.
- b) Soluțiile din Z_4 ale ecuației sunt $\hat{2}$ și $\hat{3}$.
- c) $\det(A) = -1$.
- d) $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{a}{b}$.
- e) Calcul direct.

2.

- a) $f'(x) = 2x - 2^{-x} \ln 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \ln 2}$.
- c) $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci f este convexă pe \mathbf{R} .
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 - \frac{\ln 2}{2}$.
- e) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 13} dx = \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{14}{13}$.

Subiectul III.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- b) Calcul direct.

- c) Deoarece $A^3 = O_3$ și matricele A și I_3 comută, avem :
 $I_3 = I_3 + A^3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$.
- d) Din punctul c) obținem că $(I_3 + A)^{-1} = I_3 - A + A^2$.
- e) Pentru $B = A^2 \neq O_3$, avem că $A \cdot B = O_3$.
- f) Pentru orice $z \in \mathbf{C}$ și $n \in \mathbf{N}^*$, avem $\det(X) = 1$, deci matricea X e inversabilă.
- g) Din ipoteză, pentru orice $z \in \mathbf{C}$ avem $\det(I_3 + zB) = 1$.

Pentru $z \in \mathbf{C}^*$, $1 = \frac{1}{z^3} \cdot \det(z \cdot I_3 + B)$.

Așadar, pentru orice $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $\det(z \cdot I_3 + B) = z^3$. Cum $-z \in \mathbf{C}^*$, obținem
 $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $f(z) = \det(B - z \cdot I_3) = -z^3$ și apoi $\forall z \in \mathbf{C}$, $f(z) = \det(B - z \cdot I_3) = -z^3$.
Obținem că $f(B) = -B^3$ și apoi $B^3 = O_3$.

Subiectul IV.

a) $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) Calcul direct.

c) Deoarece $g'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, rezultă că există $k \in \mathbf{R}$ astfel încât
 $g(x) = k$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Obținem $k = g(0) = 0$, deci $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

d) Calcul direct.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\arctg(x+1) - \arctg x) \stackrel{\text{e)}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{1}{1+x+x^2} \right) = \arctg 0 = 0$.

f) $a_n = \sum_{k=1}^n \arctg \frac{1}{1+k+k^2} \stackrel{\text{e)}{\rightarrow} \sum_{k=1}^n (\arctg(k+1) - \arctg k) = \arctg(n+1) - \arctg 1$,

deci $a_n = \arctg(n+1) - \frac{\pi}{4}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{1}{1+1+1^2} + \arctg \frac{1}{1+2+2^2} + \dots + \arctg \frac{1}{1+n+n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{d)}{\rightarrow}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctg(n+1) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$.