

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta085

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(2,0,3)$ la planul $2x + y + 5z - 4 = 0$.
- (4p) c) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsa de ecuație
- $$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$
- și dreapta de ecuație
- $y = 2x$
- .
- (4p) d) Să se arate că $\sin 2 > \cos 2$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, 3)$, $B(-4, 9)$ și $C(8, 27)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe
- $$(\sin 15^\circ + i \cos 15^\circ)^3 = a + bi$$

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se arate că $\log_3 4 > 1$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 3x + 6$ are inversă $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(10)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 8^x = 10$.
- (3p) e) Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X + 10$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x - x - 2$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.

- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = a + bX + cX^2 + dX^3$ și $g = X^4 - 1$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, iar g are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se verifice că $g = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$.
- (4p) b) Să se arate că $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$.
- (4p) c) Să se determine rangul matricei V .
- (2p) d) Să se arate că $AV = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \\ x_1f(x_1) & x_2f(x_2) & x_3f(x_3) & x_4f(x_4) \\ x_1^2f(x_1) & x_2^2f(x_2) & x_3^2f(x_3) & x_4^2f(x_4) \\ x_1^3f(x_1) & x_2^3f(x_2) & x_3^3f(x_3) & x_4^3f(x_4) \end{pmatrix}$.
- (2p) e) Utilizând relația $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall X, Y \in \mathbf{M}_4(\mathbf{C})$, să se arate că $\det(A) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)$.
- (2p) f) Pentru $a = c = d = 0$ și $b = 1$, să se calculeze A^2 și A^4 .
- (2p) g) Pentru $a = c = d = 0$ și $b = 1$, să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $n \in \mathbf{N}^*$ și funcțiile $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x}x^n$, $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$ și $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f(t)dt$.

- (4p) a) Să se calculeze $g(0)$ și $h(0)$.
- (4p) b) Să se verifice că $g'(x) = h'(x)$, $\forall x \geq 0$.
- (4p) c) Să se arate că $h(x) = g(x)$, $\forall x \geq 0$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) e) Să se arate că $0 \leq g(x) \leq \frac{e^{-x}x^{n+1}}{n!}$, $\forall x \in [0, n]$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $x \geq 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 0$.
- (2p) g) Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$, $\forall x \geq 0$.

Varianta 085

Subiectul I

- a) 13. b) $\frac{\sqrt{30}}{2}$; c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$. d) $2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, deci $\sin 2 > 0$, $\cos 2 < 0$, de unde $\sin 2 > \cos 2$. e) 6. f) $a=b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ aplicând Moivre

Subiectul II

1. a) $\log_3 4 > 1 \Leftrightarrow 4 > 3$. b) Relația se verifică pentru $\hat{x} \in \{1, \hat{4}\}$. Probabilitatea este $\frac{2}{5}$.
 c) $f(1)=10 \Rightarrow g(10)=1$. d) $x=1$ este unica soluție deoarece $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 8^x$ este funcție crescătoare. e) -10.
 2. a) $f'(x)=3^x \cdot \ln 3 - 1$. b) 1. c) $f''(x)=3^x \cdot (\ln 3)^2 > 0$, deci f convexă pe \mathbf{R} .
 d) $f'(1)=3 \ln 3 - 1$. e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x \ln 3 - 1}{3^x - x - 1} = \ln 3$.

Subiectul III

- a) $(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$.
 b) Scăzând coloana 1 din celelalte coloane, dezvoltând determinantul după prima linie, apoi dăm factor comun de pe coloane și finalizând calculele obținem $\det V=(x_2-x_1)(\dots)$ egalitatea cerută.
 c) Polinomul g are rădăcini distincte, deci $\det V \neq 0$ și $\text{rang } V=4$.
 d) Se verifică prin calcul direct, folosind faptul că pentru $i=1, 4$ avem x_i rădăcini ale polinomului g , deci $x_i^4 = 1$ și $f(x_i) = a + bx_i + cx_i^2 + dx_i^3$.
 e) Din d) obținem $\det(AV)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)\det V$ și cum $\det(AV)=\det(A) \cdot \det(V) \neq 0$, rezultă că $\det(A)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)$.

f) Avem $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și deci $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_4$

g) Din f) avem $A^4=I_4$, deci A inversabilă și $A^{-1}=A^3$

Subiectul IV

- a) $g(0)=0$, $h(0)=0$.
 b) $g'(x)=e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$, deci
 $g'(x)=e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot h'(x)=\frac{1}{n!} f(x)=\frac{1}{n!} e^{-x} \cdot x^n$ de unde $g'(x)=h(x)$.
 c) Conform unei consecințe a teoremei lui Lagrange, două funcții cu derivatele egale diferă cel mult printr-o constantă, deci există $c \in \mathbf{R}$ astfel încât $g(x)=h(x)+c$ și folosind a obținem $c=0$, deci $g(x)=h(x)$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot x^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$

e) Deoarece $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ obținem $h(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ și deci $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$.

$f'(x) = -e^{-x} \cdot x^n + n \cdot e^{-x} \cdot x^{n-1} = e^{-x} \cdot x^{n-1}(n-x) > 0, \forall x \in (0, n)$ deci f strict crescătoare pe $[0, n]$.

Avem $g(x) = h(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^x f(x) dt = \frac{1}{n!} x f(x) = \frac{e^{-x} \cdot x^{n+1}}{n!}, \forall x \in [0, n]$

f) Fie $a_n = \frac{x^{n+1}}{n!}$, pentru $x > 0$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Pentru $x=0$ egalitatea este evidentă.

g) Din e) obținem $0 \leq 1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \leq \frac{e^{-x} \cdot x^{n+1}}{n!}$ și, înmulțind inegalitățile

cu e^x , avem $0 \leq e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \leq \frac{x^{n+1}}{n!}, \forall x \in [0, n], \forall n \in N^*$.

Trecând la limită în inegalități, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right) = 0$ de unde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right) = e^x, \forall x \geq 0.$$