

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta084

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{1+i}{2-3i}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(-1, -2, 3)$ la planul $x + y + z - 5 = 0$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2 + 3y^2 = 4$ dusă prin punctul $P(1,1)$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(-1, 2, 0)$, $M(-2, 3, 0)$ și $N(-3, 4, 0)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 1, 3)$, $B(1, 3, 1)$, $C(3, 1, 1)$ și $D(-1, -2, 3)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe
- $$(2+i)^3 = a + bi$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 1 și rația este 2, să se calculeze termenul al zecelea.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{x}$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 1$, are inversa $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(1) + g(2)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 4^x = 6$.
- (3p) e) Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X - 24$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + \sin x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

Varianta 084

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^3 + 3X + 3$.

- (4p) a) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale.

- (4p) b) Să se arate că polinomul f are o singură rădăcină reală.

Notăm cu $a \in \mathbf{R}$ unica rădăcină reală a polinomului f și cu $\mathbf{Q}(a) = \{g(a) | g \in \mathbf{Q}[X]\}$.

- (4p) c) Să se verifice că $0 \in \mathbf{Q}(a)$ și $1 \in \mathbf{Q}(a)$.

- (2p) d) Să se arate că dacă $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}(a)$, atunci $\alpha + \beta \in \mathbf{Q}(a)$ și $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{Q}(a)$.

- (2p) e) Să se arate că $\mathbf{Q}(a) = \{p + qa + ra^2 | p, q, r \in \mathbf{Q}\}$.

- (2p) f) Să se arate că dacă $p, q, r \in \mathbf{Q}$ și $p + qa + ra^2 = 0$, atunci $p = q = r = 0$.

- (2p) g) Să se arate că $a^{2007} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $a \geq 0$, $I_0(a) = \int_0^a \sin'(x) dx$ și $I_n(a) = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} \sin^{(n+1)}(x) dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

unde prin $\sin^{(n)}$ am notat derivata de ordin n a funcției sin.

- (4p) a) Să se verifice că $I_0(a) = \sin a$, $\forall a \geq 0$.

- (4p) b) Utilizând metoda integrării prin părți să se arate că

$$I_n(a) = -\frac{a^n}{n!} \sin^{(n)}(0) + I_{n-1}(a), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ și } \forall a \geq 0.$$

- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice să se arate că

$$\sin a = \sin 0 + \frac{a}{1!} \sin'(0) + \frac{a^2}{2!} \sin^{(2)}(0) + \dots + \frac{a^n}{n!} \sin^{(n)}(0) + I_n(a), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ și } \forall a \geq 0.$$

- (2p) d) Să se arate că $0 \leq |I_n(a)| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $\forall a \geq 0$.

- (2p) e) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x \geq 0$.

- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(a) = 0$, $\forall a \geq 0$.

- (2p) g) Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 84

Subiectul I.

a) $\left| \frac{1+i}{2-3i} \right| = \frac{\sqrt{26}}{13}$.

b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

c) Ecuația tangentei este $x + 3y - 4 = 0$

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD} = \frac{10}{3}$.

f) $a = 2$ și $b = 11$.

Subiectul II.

1.

a) $a_{10} = 512$.

b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{2}{3}$.

c) $g(1) + g(2) = 1$.

d) $x = 1$.

e) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 24$.

2.

a) $f'(x) = 2x + \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3} - \cos 1$.

c) $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 + \cos 1$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$.

Subiectul III.

a) Se demonstrează prin reducere la absurd.

b) Funcția polomială asociată polinomului f este strict crescătoare și de grad impar, de unde rezultă că f are o unică rădăcină $a \in \mathbf{R}$.

c) Pentru polinomul din enunț, $f \in \mathbf{Q}[X]$, avem că $f(a) = 0$, deci $0 \in \mathbf{Q}(a)$.

Considerăm $g \in \mathbf{Q}[X]$, $g = f + 1$. Avem $g(a) = f(a) + 1 = 1$, deci $1 \in \mathbf{Q}(a)$.

d) Evident.

e) Notăm $M = \{p + qa + ra^2 \mid p, q, r \in \mathbf{Q}\}$.

„ \supset ” Pentru orice $p, q, r \in \mathbf{Q}$ și $p + qa + ra^2 \in M$, alegem polinomul $g = p + qX + rX^2 \in \mathbf{Q}[X]$ și avem $p + qa + ra^2 = g(a) \in \mathbf{Q}(a)$, așadar $M \subset \mathbf{Q}(a)$.

„ \subset ” Reciproc, considerăm elementul $\alpha \in \mathbf{Q}(a)$ și polinomul $g \in \mathbf{Q}[X]$, astfel încât $g(a) = \alpha$. Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $q \in \mathbf{Q}[X]$ și $p, q, r \in \mathbf{Q}$, astfel încât $g = f \cdot q + rX^2 + qX + p$ iar $\alpha = g(a) = ra^2 + qa + p \in M$, deci $\mathbf{Q}(a) \subset M$.

f) Deoarece $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ este rădăcină a lui f , avem $a^3 = -3a - 3 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

Considerăm $p, q, r \in \mathbf{Q}$, astfel încât $p + qa + ra^2 = 0$.

Înmulțind relația precedentă cu $a \neq 0$ și reducându-l pe a^2 , rezultă:

$(pr - 3r^2 - q^2) \cdot a = 3r^2 + pq$. Deoarece $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, obținem $q^3 + 3r^2q + 3r^3 = 0$.

Dacă $r \neq 0$, împărțind relația precedentă la $r^3 \neq 0$ deducem $\left(\frac{q}{r}\right)^3 + 3\frac{q}{r} + 3 = 0$,

așadar $\alpha = \frac{q}{r} \in \mathbf{Q}$ este o rădăcină a lui f , contradicție cu punctul a).

Obținem că $r = 0$ și apoi $q = 0$ și $p = 0$.

g) Presupunem că $a^{2007} = t \in \mathbf{Q}$. Considerăm polinomul $g \in \mathbf{Q}[X]$, $g = X^{2007} - t$.

Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $q \in \mathbf{Q}[X]$ și $p, q, r \in \mathbf{Q}$, astfel încât $g = f \cdot q + rX^2 + qX + p$. Deoarece $g(a) = 0$, rezultă $p + qa + ra^2 = 0$ și din f) obținem că $p = q = r = 0$, deci $g = f \cdot q$. În concluzie, toate rădăcinile lui f sunt și rădăcini ale lui g . Deoarece toate rădăcinile lui g au același modul, rezultă că și rădăcinile a, x_2, x_3 ale lui f sunt de module egale. Rezultă $a = -\sqrt[3]{3}$.

Cum $f(-\sqrt[3]{3}) = 3 \cdot \sqrt[3]{3} \neq 0$, am ajuns la o contradicție, așadar $a^{2007} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Subiectul IV.

a) $I_0(a) = \sin a$, $\forall a \geq 0$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se folosește primul principiu al inducției matematice și punctul b).

d) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, se demonstrează prin inducție că

$$\forall k \in \mathbf{N}, \sin^{(k)} x = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \in [-1, 1]$$

Avem: $0 \leq |I_n(a)| \leq \int_0^a \left| \frac{|a-x|^n}{n!} \cdot |\sin^{(n+1)} x| dx \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} dx = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$.

e) Se folosește criteriul raportului.

f) Trecând la limită în inegalitatea de la d) și folosind punctul e) și criteriul clesțelui, obținem concluzia.

g) Din (2) rezultă $\forall n \in \mathbb{N}, \sin^{(2n)}(0)=0$ și $\sin^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$, din **c)** obținem:

$$\sin 0 + \frac{x}{1!} \sin'(0) + \frac{x^2}{2!} \sin^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{(2n+1)}(0) + I_{2n+1}(x) = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + I_{2n+1}(x) = \sin x$$

și trecând la limită și ținând cont de punctul **f)** deducem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x.$$