

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....083***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele  $A(3, 1, 2)$  și  $B(2, 3, 1)$ .
- (4p) b) Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât punctele  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  și  $M(0, x)$  să fie coliniare.
- (4p) c) Să se calculeze partea reală a numărului complex  $z = \frac{1}{3+4i}$ .
- (4p) d) Să se determine aria unui triunghi echilateral cu perimetrul egal cu 3.
- (2p) e) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care dreptele de ecuații  $x + y + 2 = 0$  și  $3x + ay + 5 = 0$  sunt paralele.
- (2p) f) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație  $3x + y = 0$  și cercul de ecuație  $x^2 + y^2 = 10$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se arate că  $\lg \frac{2}{1} + \lg \frac{3}{2} + \lg \frac{4}{3} + \dots + \lg \frac{10}{9} = 1$ .
- (3p) b) Să se determine probabilitatea ca un element din  $Z_6$  să fie inversabil față de operația de înmulțire.
- (3p) c) Să se rezolve ecuația  $A_x^2 = 20$ , pentru  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \geq 2$ .
- (3p) d) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f = X^4 + X^2 + 2$  la polinomul  $g = X^2 + X + 1$ .
- (3p) e) Se consideră progresia geometrică  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , cu  $a_1 = 1$  și  $a_2 = 2$ . Să se calculeze  $a_{10}$ .

**2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x - x$ .**

- (3p) a) Să se calculeze  $f(0)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră polinomul  $f_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \dots + \frac{X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)}{n!} \in \mathbf{C}[X]$ ,

$n \in \mathbf{N}^*$  și matricele  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A \in M_3(\mathbf{C})$ , cu  $A^4 = O_3$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f_n(0)$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $f_n(-1)$ .
- (4p) c) Să se arate că  $f_n = \frac{1}{n!} (X+1)(X+2)\dots(X+n)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) d) Să se arate că polinomul  $f_n$  are rădăcinile  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$ , ...,  $x_n = -n$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) e) Să se arate că  $(I_3 - x \cdot A)(I_3 + x \cdot A + x^2 \cdot A^2 + x^3 \cdot A^3) = I_3$ ,  $\forall x \in \mathbf{C}$ .
- (2p) f) Să se arate că  $\det(I_3 - x \cdot A) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{C}$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\det(f_3(A))$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$  și sirurile

$$x_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad I_n(\alpha) = \int_1^n f(x) dx, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f(1)$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \geq 1$ .
- (4p) c) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = \begin{cases} \infty, & \alpha \in (0, 1] \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \end{cases}$ .
- (2p) d) Să se arate că  $\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq \frac{1}{(n-1)^\alpha}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- (2p) e) Să se arate că  $x_n(\alpha) - 1 \leq I_n(\alpha) \leq x_{n-1}(\alpha)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- (2p) f) Să se arate că sirul  $(x_n(\alpha))_{n \in \mathbf{N}^*}$  este divergent pentru  $\alpha \in (0, 1]$  și convergent pentru  $\alpha > 1$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{x_{n+1}(1)} - e^{x_n(1)}) = e^c$ , unde  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$ .

## Varianta 83

**Subiectul I.**

- a)  $AB = \sqrt{6}$ .  
 b)  $x = 1$ .  
 c)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{25}$ .  
 d) Aria triunghiului este  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .  
 e)  $a = 3$ .  
 f)  $A(1, -3)$  și  $B(-1, 3)$ .

**Subiectul II.**

**1.**

- a)  $\lg \frac{2}{1} + \lg \frac{3}{2} + \lg \frac{4}{3} + \dots + \lg \frac{10}{9} = 1$ .  
 b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{1}{3}$ .  
 c)  $x = 5$ .  
 d) Câtul împărțirii este  $q = X^2 - X + 1$ , iar restul este  $r = 1$ .  
 e)  $a_{10} = 512$ .

**2.**

- a)  $f(0) = 0$ .  
 b)  $f'(x) = \cos x - 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .  
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .  
 d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ .  
 e)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1 - \frac{\pi^2}{8}$ .

**Subiectul III.**

- a)  $f_n(0) = 1$ .  
 b)  $f_n(-1) = 0$ .  
 c) Din enunț deducem că  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $f_n = f_{n-1} + \frac{X(X+1)(X+2) \cdot \dots \cdot (X+n-1)}{n!}$

Folosind relația anterioară, se demonstrează prin inducție că

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, f_n = \frac{1}{n!} (X+1)(X+2) \cdot \dots \cdot (X+n).$$

**d)** Evident, folosind punctul **c)**.

**e)** Deoarece  $I_3 \cdot A = A \cdot I_3 = A$ , obținem:

$$(I_3 - x \cdot A)(I_3 + x \cdot A + x^2 \cdot A^2 + x^3 \cdot A^3) = I_3 - x^4 \cdot A^4 \stackrel{ip}{=} I_3, \quad \forall x \in \mathbf{C}.$$

**f)** Din **e)** obținem că  $\det(I_3 - x \cdot A) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbf{C}$ .

Deducem că că funcția  $g$  este constantă, deci  $\forall x \in \mathbf{C}, g(x) = g(0) = \det(I_3) = 1$ .

**g)** Avem  $f_3 = (1+X)\left(1+\frac{1}{2}X\right)\left(1+\frac{1}{3}X\right)$  și

$$f_3(A) = (I_3 + A)\left(I_3 + \frac{1}{2}A\right)\left(I_3 + \frac{1}{3}A\right) = g(-1) \cdot g\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(-\frac{1}{3}\right) = 1.$$

#### Subiectul IV.

**a)**  $f(1) = 1$ .

**b)**  $f'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq 1$ .

**c)**  $I_n(\alpha) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^n = \frac{1}{1-\alpha} \cdot (n^{1-\alpha} - 1), \quad \text{pentru } \alpha \neq 1$ .

Dacă  $\alpha \in (0, 1)$ , atunci  $n^{1-\alpha} \rightarrow \infty$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = \infty$ .

Dacă  $\alpha = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n) = \infty$ .

Dacă  $\alpha > 1$ , atunci  $n^{1-\alpha} \rightarrow 0$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ .

**d)** Pentru  $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ , din **b)** deducem că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $[n-1, n]$ , deci  $\forall x \in [n-1, n]$ , avem  $f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$ .

Integrând ultima relație pe intervalul  $[n-1, n]$  obținem concluzia.

**e)** Înlocuindu-l pe  $n$  pe rând cu fiecare dintre numerele  $2, 3, \dots, n$  în inegalitatea din punctul **d)** și adunând relațiile, se obține afirmația din enunț.

**f)** Sirul  $(x_n(\alpha))_{n \in \mathbf{N}^*}$  este, evident, strict crescător, deci are limită în  $\overline{\mathbf{R}}$ .

Dacă  $\alpha \in (0, 1]$ , folosind **e)** obținem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\alpha) = \infty$ .

Dacă  $\alpha > 1$ , folosind **e)** obținem că există  $M > 0$  astfel încât  $x_n(\alpha) \leq I_n(\alpha) + 1 \leq M$ , deci sirul  $(x_n(\alpha))_{n \in \mathbf{N}^*}$  este convergent.

$$\mathbf{g)} \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{x_{n+1}(1)} - e^{x_n(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n(1)} (e^{x_{n+1}(1)-x_n(1)} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{c_n+\ln n} \left( e^{\frac{1}{n+1}} - 1 \right)}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot e^{c_n}}{n+1} = e^c.$$