

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta082

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3+2i}{3-2i}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1, 2, 4)$ la punctul $E(2, 3, 9)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$.
- (4p) d) Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsa de ecuație $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ și dreapta de ecuație $x + y = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, -1, 2)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(2, 1, -1)$ și $D(1, 2, 4)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ)^{360} = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se arate că $\log_2 3 > 1,5$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $3^n + 4^n \geq 7^n$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 5$, are inversa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, să se calculeze $g(8)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3 + 5x - 6 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f = X^4 - X - 8$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - \text{arctg } x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.

- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3 + 1} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_5)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ 2\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \mid \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_5 \right\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$.
- (4p) b) Să se arate că, dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_5$ și $\hat{x}^2 - 2\hat{y}^2 = 0$, atunci $\hat{x} = \hat{y} = 0$.
- (4p) c) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ și $A \cdot B \in G$.
- (2p) d) Să se determine numărul de elemente din mulțimea G .
- (2p) e) Să se arate că dacă $A \in G$ și $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$, astfel încât $A \cdot B = I_2$.
- (2p) f) Să se arate că operațiile de adunare și de înmulțire a matricelor determină pe mulțimea G o structură de corp comutativ.
- (2p) g) Să se dea un exemplu de structură de corp cu 9 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $a_n = \frac{1}{3^{1^2}} + \frac{1}{3^{2^2}} + \dots + \frac{1}{3^{n^2}}$ și

$$b_n = a_n + \frac{1}{3n \cdot 3^{n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- (4p) a) Să se verifice că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător.
- (4p) b) Să se arate că sirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.
- (4p) c) Să se arate că sirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sunt mărginite.
- (2p) d) Să se arate că sirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sunt convergente și au aceeași limită.
- (2p) e) Notăm cu $a \in \mathbf{R}$ limita sirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Să se arate că numărul a este irațional.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2007}}{3^{n^2}} = 0$.
- (2p) g) Să se arate că nu există polinoame nenule $f, g \in \mathbf{R}[X]$, cu proprietatea că $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 82

Subiectul I

a)1. b) $3\sqrt{3}$. c) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \sqrt{2}$. d) $\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}\right); \left(-\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$. e) $\frac{35}{6}$. f)

$a=1$, $b=0$, aplicând formula lui Moivre.

Subiectul II

1. a) $1,5 = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 \sqrt{9} = \log_2 3$.

b) Probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$. c) $g(8)=1$. d) $x=1$. e) 0.

2. a) $f'(x) = 2 - \frac{1}{1+x^2}$. b) $2 - \frac{\pi}{4}$. c) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ strict crescătoare pe \mathbf{R} .

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arctan x}{x} = 2 - 1 = 1$. e) $\frac{2}{3} \ln 2$.

Subiectul III

a) Pentru $\hat{x} = \hat{1}$, $\hat{y} = \hat{0}$ obținem $I_2 \in G$, iar pentru $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$ obținem $O_2 \in G$;

b) Dacă $\hat{x} \in Z_5$ atunci $\hat{x}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}\}$.

Daca $\hat{y}^2 = \hat{0}$ avem $\hat{x}^2 = \hat{0}$, deci $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$. Daca $\hat{y}^2 = \hat{1}$ avem $\hat{x}^2 = \hat{3}$, imposibil. Dacă $\hat{y}^2 = \hat{4} \Rightarrow \hat{x}^2 = \hat{2}$, imposibil

c) Dacă $A, B \in G$, avem $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{c} & \hat{d} \\ \hat{2}\hat{d} & \hat{c} \end{pmatrix}$, $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} \in Z_5$, deci

$$A + B = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{c} & \hat{b} + \hat{d} \\ \hat{2}(\hat{b} + \hat{d}) & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix} \in G \text{ și } A \cdot B = \begin{pmatrix} \hat{a}\hat{c} + \hat{2}\hat{b}\hat{d} & \hat{a}\hat{d} + \hat{b}\hat{c} \\ \hat{2}(\hat{a}\hat{d} + \hat{b}\hat{c}) & \hat{a}\hat{c} + \hat{2}\hat{b}\hat{d} \end{pmatrix} \in G.$$

d) Cum $\hat{x}, \hat{y} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$, mulțimea G are $5 \cdot 5$ elemente.

e) Dacă $A \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix}$, $\det A = \hat{x} - \hat{2}\hat{y}^2$ și deoarece $A \neq O_2$, folosind b) avem

$\det A \neq \hat{0}$. Fie $\hat{z} \in Z_5$, inversul elementului $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2$. Atunci matricea

$$B = \begin{pmatrix} \hat{x}\hat{z} & -\hat{y}\hat{z} \\ -\hat{2}\hat{y}\hat{z} & \hat{x}\hat{z} \end{pmatrix} \in G \text{ și } AB = BA = I_2.$$

f) Din c) obținem că adunarea și inmulțirea matricilor din G sunt operații interne.

Adunarea și inmulțirea matricelor din $M_2(Z_5)$ fiind associative, vor fi associative și în G .

Pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ 2\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \in G$ avem $-A = \begin{pmatrix} -\hat{x} & -\hat{y} \\ -\hat{2}\hat{y} & -\hat{x} \end{pmatrix} \in G$, iar dacă $A \neq O_2$

folosind e) obținem că este inversabilă. În plus se verifică prin calcul că $AB=BA$, $\forall A, B \in G$. Cum inmulțirea matricelor din $M_2(Z_5)$ este distributivă față de adunare, această proprietate se păstrează și în G , deci $(G, +, \cdot)$ comutativ.

g) $(G', +, \cdot)$ corp comutativ cu 9 elemente. $G' = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix}, \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_3 \right\}$

Subiectul IV

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3^{(n+1)^2}} > 0$, deci (a_n) strict crescător,

b) $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + \frac{1}{3(n+1) \cdot 3^{(n+1)^2}} - a_n - \frac{1}{3n \cdot 3^{n^2}}$ $\stackrel{a)}{=} \frac{1}{3^{(n+1)^2}} + \frac{1}{3(n+1) \cdot 3^{(n+1)^2}} - \frac{1}{3n \cdot 3^{n^2}} =$
 $= \frac{(3n+4) \cdot n - (n+1) \cdot 3^{2n+1}}{3n(n+1) \cdot 3^{(n+1)^2}} = \frac{(n+1)(3n - 3^{2n+1} + n)}{3n(n+1) \cdot 3^{(n+1)^2}} < \frac{(n+1)(3n+1 - 3^{2n+1})}{3n(n+1) \cdot 3^{(n+1)^2}}.$

Se demonstrează prin inducție că $3n+1 < 3^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, deci $b_{n+1} - b_n < 0$, de unde (b_n) strict descrescător.

c) Din a), b) obținem $a_1 \leq a_n$, $b_n \leq b_1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, dar $a_n < b_n$, deci

$$\frac{1}{3} \leq a_n \leq b_n \leq \frac{4}{9}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

d) Din a), b), c) obținem $(a_n), (b_n)$ convergente și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{3n \cdot 3^{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

e) Avem $a_n < a < b_n, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Presupunem $a \in \mathbf{Q}$, deci $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{N}^*$ și obținem

$$a_q < \frac{p}{q} < a_q + \frac{1}{3q \cdot 3^{q^2}}. \text{ Înmulțim inegalitățile cu } q \cdot 3^{q^2} \text{ și avem}$$

$$q \cdot 3^{q^2} \cdot a_q < p \cdot 3^{q^2} < q \cdot 3^{q^2} \cdot a_q + \frac{1}{3}. \text{ Dar } q \cdot 3^{q^2} \cdot a_q = k \in \mathbf{Z}, p \cdot 3^{q^2} \in \mathbf{Z} \text{ și}$$

$$k < p \cdot 3^{q^2} < k + \frac{1}{3} \text{ contradicție, deci } a \notin \mathbf{Q}.$$

f) Fie $a_n = \frac{n^{2007}}{3^{n^2}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, deci $a_n > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2007}}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^{2007}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2007} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

g) Presupunem că există polinoamele $f, g \in R[x]$, nenule, astfel incât $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$,

$\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Avem $\frac{f(x+1)}{g(x+1)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, cu $u, v \in R[x]$, nenule, prime între ele.

$a_{n+1} - a_n = \frac{u(n)}{v(n)} = \frac{1}{2^{(n+1)^2}}$, deci $u(n) = \frac{v(n)}{2^{(n+1)^2}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Din $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{2^{(n+1)^2}} = 0$ obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 0, \text{ de unde } u = 0, \text{ contradicție.}$$