

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta081

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

 În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(1, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

- (4p) a) Să se determine lungimea segmentului (OA) .
- (4p) a) Să se determine ecuația mediatoarei segmentului (OA) .
- (4p) c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $OA = OB$.
- (4p) d) Să se determine ecuația cercului de centru O și rază OA .
- (2p) e) Să se calculeze produsul de numere complexe $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot i^7$.
- (2p) f) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = 2 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}$ și $\vec{w} = 5 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine probabilitatea ca alegând $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ să avem $2^n \leq n^2$.
- (3p) b) Să se determine trei numere reale în progresie aritmetică crescătoare, știind că suma lor este 9, iar produsul lor este 15.
- (3p) c) Să se rezolve ecuația $\log_4 x = 2$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea $[0, \infty)$ ecuația $\sqrt{x+2} = x$.
- (3p) e) Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se demonstreze că funcția f este strict monotonă pe \mathbf{R} .
- (3p) c) Să se determine ecuațiile asymptotelor orizontale ale graficului funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră grupul S_4 al permutărilor cu 4 elemente și permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ și } e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $\sigma^2 = \tau^2 = e$.
- (4p) b) Să se arate că $\sigma^{-1} = \sigma$ și $\tau^{-1} = \tau$.
- (4p) c) Să se găsească o permutare $a \in S_4$ pentru care $a^{-1} \neq a$.
- (2p) d) Să se verifice că $\sigma \cdot \tau \neq \tau \cdot \sigma$.
- (2p) e) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii S_4 .
- (2p) f) Să se arate că permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ este un element de ordinul 4 în grupul S_4 .
- (2p) g) Să se arate că orice submulțime H a lui S_4 care are cel puțin 13 elemente, conține două permutări u și v cu proprietatea $u \cdot v \neq v \cdot u$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f_n(0) = n, \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ și integralele } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin x}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f_n este continuă pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) c) Să se calculeze integralele I_1 și I_2 .
- (2p) d) Utilizând formula $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, să se arate că $I_n - I_{n-2} = \frac{2}{n-1} \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$.
- (2p) e) Să se arate că $I_{2n-1} = \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că $I_{2n} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Varianta 81

Subiectul I:

- a) $\sqrt{5}$. b) $2x + 4y - 5 = 0$. c) $a = \pm 2$. d) $x^2 + y^2 = 5$. e) 1. f) 0..

Subiectul II:

1. a) Probabilitatea cerută este egală cu $\frac{1}{2}$. b) Fie $a < b < c$ cele trei numere în progresie aritmetică, deci $2b = a + c$ și, folosind $a + b + c = 9$, obținem

$$b = 3, a = 1, c = 5. \text{ c) } x=4^2=16. \text{ d) } x=2. \text{ e) } \min_{x \in R} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = -4.$$

2. a) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. b) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\pi}{2} \text{ asimptote orizontale. d) } 1. \text{ e) } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

Subiectul III:

- a) Se verifică prin calcul.

b) $\sigma^2 = e \Leftrightarrow \sigma \cdot \sigma = e \Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}$ și analog $\tau = \tau^{-1}$.

c) De exemplu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

d) $\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Deci } \sigma \cdot \tau \neq \tau \cdot \sigma.$$

- e) S_4 are $4! = 24$ elemente.

f) Se arată prin calcul că, pentru $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, avem $\sigma_1^4 = e$.

- g) Presupunem că există o mulțime A care conține cel puțin 13 permutări cu proprietatea că oricare 2 sunt comută. Se arată atunci că orice element din S_4 este un produs de 2 elemente din mulțimea A. Rezultă atunci că orice 2 elemente din S_4 sunt comută ceea ce contrazice d). Deci presupunerea este falsă și problema este rezolvată.

Subiectul IV:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\frac{\sin x}{x}} = n, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

- b) f_n este evident continuă pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ și cum $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = n = f(0)$ ea este continuă în $x = 0$

c) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) dx = \frac{\pi}{2}, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

d) $I_n - I_{n-2} = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n-2}(x) dx = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) - f_{n-2}(x) dx =$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos \frac{2(n-1)x}{2}}{\sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n-1)x dx = 2 \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$
 $\frac{2}{n-1} \sin(n-1) \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 3.$

e) Aplicând d), obținem $I_{2n+1} - I_{2n-1} = \frac{1}{n} \sin n\pi = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$, deci $I_{2n+1} = I_{2n-1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$,

de unde $I_{2n-1} = I_1 = \frac{\pi}{2}$.

f) Folosind d), obținem $I_{2n} - I_{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{2n-1} \cos n\pi$,

deci $I_{2n} = I_{2n-2} - \frac{2}{2n-1} \cos n\pi$, de unde $I_2 = I_0 - \frac{2}{3} \cos 2\pi = 2(1 - \frac{1}{3})$.

Notăm $P(n) : I_{2n} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-1} \right), \forall n \in \mathbf{N}^*$.

$P(1)$ este adevărată și considerăm $P(k)$ adevărată, $\forall k \in \mathbf{N}^*$. Atunci

$$I_{2k+2} = I_{2k} + \frac{2}{2k+1} \cdot \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^k \cdot \frac{1}{2k-1} \right) + \frac{2}{2k+1} \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^k \cdot \frac{1}{2k-1} + (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} \right), \text{ deci } P(k+1) \text{ adevărată și, conform}$$

principiului inducției, $P(n)$ adevărată $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) Din punctual f) rezultă $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2} I_{2n}$.

Aratam ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} = \frac{\pi}{2}. \text{ Avem } I_{2n} - I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx - \sin(2n-1)x}{\sin x} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{4n-1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \cos \frac{(4n-1)}{2} x dx = \frac{2}{4n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{(4n-1)}{2} x \right)' dx =$$

$$= \frac{2}{4n-1} \left(\sqrt{2} \sin \frac{(4n-1)\pi}{8} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \sin \frac{(4n-1)}{2} x dx \right) \rightarrow 0 \text{ deoarece functia } h(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \sin \frac{(4n-1)}{2} x$$

este marginita pe $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.