

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....080***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze  $\sin 90^\circ + \sin 270^\circ$ .
- (4p) b) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al dreptelor  $d_1 : x - y = 0$  și  $d_2 : 2x + y - 6 = 0$ .
- (4p) c) Să se determine  $\alpha \in \mathbf{R}$ , știind că dreptele  $d_1 : x - y = 0$  și  $d_2 : \alpha x + y - 6 = 0$  sunt perpendiculare.
- (4p) d) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor  $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$  și  $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ .
- (2p) e) Să se determine ecuația tangentei la hiperbola  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$  dusă prin punctul  $A(3, 2)$ .
- (2p) f) Să se determine aria unui triunghi care are laturile exprimate prin numere naturale și are perimetrul egal cu 6.

**SUBIECTUL II ( 30p )**

- Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2^x$  și  $g(x) = x^2$ .
  - Să se calculeze  $(f \circ g)(-1)$  și  $(g \circ f)(-1)$ .
  - Să se arate că  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ .
  - Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuația  $f(2x) = 2f(x)$ .
  - Să se calculeze suma  $f(0) + f(1) + \dots + f(9)$ .
  - Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii  $\{0,1,2,3,4\}$  să verifice inegalitatea  $f(x) \geq g(x)$ .
- Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 4x$ .
  - Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
  - Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
  - Să se arate că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(-\infty, 1]$  și strict crescătoare pe intervalul  $[1, \infty)$ .
  - Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
  - Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ ,  $A \neq \alpha I_2$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$  și mulțimea

$$C(A) = \{X \in M_2(\mathbf{R}) \mid A \cdot X = X \cdot A\}.$$

- (4p) a) Să se arate că dacă  $X = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in C(A)$  și  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $a \neq d$  atunci
- $$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{a'-d'}{a-d}.$$
- (4p) b) Să se calculeze  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$  și  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2$ .
- (4p) c) Să se arate că  $C(A) = \{\alpha A + \beta I_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$ .
- (2p) d) Să se arate că există matrice  $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$  astfel ca  $\det(X^2 + Y^2) < 0$ .
- (2p) e) Să se arate că dacă  $B \in C(A)$ , atunci  $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ .
- (2p) f) Să se arate că dacă  $B \in C(A)$ , atunci  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ .
- (2p) g) Să se arate că dacă  $B, C \in C(A)$ , atunci  $\det(B^2 + C^2) \geq 0$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f_a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , unde  $a \in \mathbf{R}$ ,

$$f_a(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .
- (4p) b) Să se arate că pentru orice  $a \in \mathbf{R}$ , funcția  $f_a$  nu are limită în punctul  $x = 0$ .
- (4p) c) Să se arate că  $g$  este continuă pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se arate că  $h$  este derivabilă pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) e) Să se arate că  $h'(x) = 2g(x) - f_0(x)$ , pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) f) Să se arate că  $f_a$  admite primitive dacă și numai dacă  $a = 0$ .
- (2p) g) Să se determine valorile lui  $a$  pentru care funcția  $f_a^2$  admite primitive.

### Varianta 080

#### **Subiectul I**

a) 0; b) (2;2); c)  $\alpha = 1$ ; d) -5; e)  $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ ; f)  $\sqrt{3}$ .

#### **Subiectul II**

1. a) 2; b)  $f(x+y) = 2^{x+y}$ ;  $f(x) \square f(y) = 2^x \square 2^y = 2^{x+y}$ , deci  $f(x+y) = f(x) \square f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ;

c)  $f(2x) = 2f(x) \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \square 2^x$  cu soluția  $x = 1$ ; d) 1023; e)  $\frac{4}{5}$ .

2. a)  $4x^3 - 4 = 0$ ; b)  $f'(1) = 0$ ; c)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ;  $f'(x) < 0$  pentru  $x \in (-\infty; 1)$   $\Rightarrow f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty; 1]$ ;  $f'(x) > 0$  pentru  $x \in (1, +\infty)$   $\Rightarrow f$  este strict crescătoare pe  $[1, +\infty)$ ; d)  $f''(x) = 12x^2 \geq 0$  pentru orice  $x$  număr real, de unde se obține  $f$  convexă pe  $\mathbf{R}$ ;

e)  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{9}{5}$ .

#### **Subiectul III**

a)  $X \in C(A) \Rightarrow AX = XA \Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{a'-d'}{a-d}$ .

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

c) Dacă  $b \neq 0, c \neq 0, a \neq d$ , din punctul a) și

$X \in C(A), X = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{a'-d'}{a-d} = \alpha$ . Deci  $b' = \alpha b$ ,  $c' = \alpha c$ , și notând

$\beta = d' - \alpha d$ , avem  $d' = \alpha d + \beta$ ,  $a' = \alpha a + \beta$ , deci  $X = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d + \beta \end{pmatrix} = \alpha A + \beta I_2$ .

d)  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

e)  $B \in C(A) \Rightarrow B = \alpha A + \beta I_2, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \Rightarrow AB = BA$ , deci  $(A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$ .

f) Folosind e), avem  $\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB) \cdot \det(\overline{A + iB}) = \det(A + iB) \overline{\det(A + iB)} = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$ .

g)  $B = \alpha_1 A + \beta_1 I_2$ ,  $C = \alpha_2 A + \beta_2 I_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow B \cdot C = C \cdot B$  și din f)  $\Rightarrow \det(B^2 + C^2) \geq 0$ .

#### **Subiectul IV**

a) Functia  $f_1 : R^* \rightarrow R$ ,  $f_1(x) = \sin \frac{1}{x}$  este surjectiva,  $|f_1(x)| \leq 1, \forall x \in R^*$ , iar  $g_1 : R^* \rightarrow R$ ,  $g_1(x) = x$

are  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . Deci  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) g_1(x) = 0$ ;

b) Fie  $a_n = \frac{1}{2n\pi}, b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ . Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$ ,

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$  nu există, de unde obținem ca  $f_a$  nu are limită în  $x = 0$ .

c)  $g$  este continuă pe  $(-\infty, 0)$  și  $(0, +\infty)$ , iar folosind a) avem  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$ , deci  $g$  este continuă pe  $\mathbf{R}$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ , deci  $h$  derivabilă în  $x = 0$  și cum  $h$  derivabilă pe  $\mathbf{R}^*$ , avem  $h$  derivabilă pe  $\mathbf{R}$ .

e)  $h'(x) = \left( x^2 \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$  pentru  $x \neq 0$  și  $h'(0) = 0$  conform punctului d).

$$2g(x) - f_0(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ deci } h'(x) = 2g(x) - f_0(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

f) Demonstrăm că  $f_0$  admite primitive. Din punctul d)  $\Rightarrow f_0(x) = 2g(x) - h'(x), \forall x \in \mathbf{R}$ . Funcția  $f$  este continuă, deci admite primitive. Dacă  $G$  este o primitivă a lui  $g$ , atunci  $F_0(x) = 2G(x) - h(x)$  este o primitivă a lui  $f_0(x)$ .

Demonstrăm că dacă  $a \neq 0$ ,  $f_a$  nu admite primitive. Sa presupunem contrariul.

Atunci  $(f_a - f_0)(x) = \begin{cases} 0, \text{daca } x \neq 0 \\ a, \text{daca } x = 0 \end{cases}$

admete primitive, contradicție, deoarece nu are proprietatea lui Darboux.

g)  $f_a^2(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a^2, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{2}{x}), & x \neq 0 \\ a^2, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \neq 0 \\ a^2, & x = 0 \end{cases} - \frac{1}{2} \begin{cases} \cos \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Prin analogie cu punctele precedente rezultă că

$$f_a^2 \text{ admite primitive dacă și numai dacă } a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$