EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….079

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex i^{2007}.

(4p) **b)** Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului cu vârfurile în punctele $L(-1,2)$, $M(-2,3)$ și $N(6,1)$.

(4p) **c)** Să se determine punctele care au coordonatele egale și care aparțin cercului de ecuație $x^2+y^2=8$.

(4p) **d)** Să se scrie un vector paralel cu vectorul $\vec{v}=2\vec{i}+6\vec{j}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}$.

(2p) **f)** Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $z^6=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine numărul de elemente din mulțimea $\{12, 13, ..., 52\}$ care **nu** sunt divizibile cu 4.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element al inelului $(\mathbf{Z}_{12}, +, \cdot)$ să fie inversabil față de înmulțire.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x=4$.

(3p) **d)** Să se determine suma coeficienților polinomului $f=X^{2006}+X^{2005}+...+X+1$.

(3p) **e)** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2\}$ care verifică relația $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=4$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{2006}+x^{2008}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se determine valoarea minimă a funcției f.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_3(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

(4p) **c)** Să se arate că , dacă $Y\in M_3(\mathbf{C})$ şi $Y\cdot A=A\cdot Y$, atunci există $a,b,c\in\mathbf{C}$ astfel încât $Y=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$.

(2p) **d)** Să se găsească o matrice $B\in M_3(\mathbf{C})$, astfel încât $A\cdot B=A+I_3$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice să se arate că $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\forall a,b,c\in\mathbf{C}$.

(2p) **f)** Să se arate că polinomul $f=X^n-\alpha$ nu are rădăcini multiple, $\forall\alpha\in\mathbf{C}^*$.

(2p) **g)** Să se determine numărul de soluții $X\in M_3(\mathbf{C})$ ale ecuației $X^{2007}=A$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$, definit prin $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$ şi $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n dx$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze I_0.

(4p) **b)** Utilizând metoda integrării prin părți , să se arate că $I_n=-\frac{1}{e}+n\cdot I_{n-1}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se arate că $I_n=\frac{n!}{e}\left(e-\left(1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}\right)\right)$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $\frac{x^n}{e}\le x^n e^{-x}\le x^n$, $\forall x\in[0,1]$ şi $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{1}{(n+1)e}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Utilizând inegalitățile de la punctul **e**), să se arate că $\forall n\in\mathbf{N}^*$ $e\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}\right)=e$.

Varianta 079

Subiectul I.

a) $\left|i^{2007}\right| = 1$. b) G(1,2). c) A(-2.-2), B (2,2). d) $\vec{i} + 3\vec{j}$. e) $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$. f) 2.

Subiectul II

1.a) 30 (11 sunt divizibile cu 4). b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) f(1)=2007. e) 3 funcții.

2.a) $f'(x)=2006x^{2005}+2008x^{2007}$. b) $\frac{1}{2007}+\frac{1}{2009}$.

c) $f''(x)= 2006\cdot 2005x^{2004} + 2008\cdot 2007x^{2006} \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f convexă pe **R**.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 4014$. e) x=0 punct de minim, valoarea minimă a funcției f este f(0)=0..

Subiectul III

a) detA=6, rangA=3. b) $\det A \neq 0 \Rightarrow$ A inversabilă. $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $Y \in M_3(C) \Rightarrow \exists a,b,c,m,n,p,q,r,s \in C$ astfel încât $Y=\begin{pmatrix} a & m & n \\ p & b & q \\ r & s & c \end{pmatrix}$ din YA=AY obținem

$m = n = p = q = r = s = 0$, deci $\exists a,b,c \in C$ astfel încât $Y=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

d) $B \in M_3(C) \Rightarrow$ există a,b,c,d,e,f,g,h,i$\in$ C astfel încât $B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Din $AB=A+I_3$ obținem

$B=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Notăm P(n): $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n =$

$= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$, n$\in$ **N***. P(1) este adevărată, şi considerând P(k) adevărată avem:

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}$, deci P(k+1) adevărată şi conform principiului inducției matematice obținem P(n) adevărată pentru $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) Presupunem că f are o rădăcină multiplă. Atunci ea verifica şi ecuația $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$ dar $f(0) = -\alpha \neq 0,$ contradictie

g) Fie X∈ $M_3(\mathbf{C})$ soluție a ecuației X^{2007}=A. Atunci $X \cdot A = X \cdot X^{2007} = X^{2007} \cdot X = A \cdot X$ şi conform punctului c) obținem X=$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ deci folosind e) avem X^{2007}=$\begin{pmatrix} a^{2007} & 0 & 0 \\ 0 & b^{2007} & 0 \\ 0 & 0 & c^{2007} \end{pmatrix}$de unde a^{2007}=3, b^{2007}=2, c^{2007}=1. Din f)$\Rightarrow$fiecare din ecuațiile precedente are 2007 soluții distincte, deci ecuația X^{2007}=A are 2007^3 soluții în $M_3(\mathbf{C})$.

Subiectul IV.

a) 1-$\frac{1}{e}$. b) I_n=$\int_0^1 e^{-x}x^n dx = -e^{-x}x^n \Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}nx^{n-1}dx = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$. c) Se demonstrează prin inducție matematică. d) x∈ [0,1]$\Rightarrow e^0 \le e^x \le e^1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le e^{-x} \le 1 \Rightarrow \frac{x^n}{e} \le x^n e^{-x} \le x^n$.

e) Integrând inegalitățile de la punctul d) avem $\int_0^1 \frac{x^n}{e}dx \le \int_0^1 x^n e^{-x}dx \le \int_0^1 x^n dx, \forall n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$

$\frac{1}{(n+1)e} \le I_n \le \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) Din e) obținem $\frac{1}{(n+1)e} \le \frac{n!}{e}\left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\right) \le \frac{1}{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$. Presupunem că e∈ $\mathbf{Q}$ deci $e = \frac{p}{q}, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*$ şi aplicăm relația anterioară pentru n=q. $\frac{1}{(q+1)!} \le$

$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{q!}\right) \le \frac{p}{q(q+1)!}$, iar înmulțind cu q! obținem

0< $\frac{1}{q+1} < p(q-1)! - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{q!}\right) < \frac{p}{q(q+1)} < 1$ deoarece q≥ 2, contradicție cu

p(q-1)!-q! $\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{q!}\right) \in \mathbf{Z}$.

g) Folosind inegalitățile de la punctul e) obținem $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n e}{n!} = 0$, iar din punctul c)

$\lim_{n\to\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\right)$=0, de unde e-$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = 0$.