

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....078***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$  și  $\vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(2, 4, 6)$  la planul  $x + y + z - 6 = 0$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la hiperbola  $x^2 - 3y^2 = 1$  dusă prin punctul  $P(2, 1)$ .
- (4p) d) Să se arate că punctele  $L(1, 2, 0)$ ,  $M(2, 3, 0)$  și  $N(3, 4, 0)$  sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(1, 3, 2)$ ,  $B(3, 2, 1)$ ,  $C(2, 1, 3)$  și  $D(2, 4, 6)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $E(1, 1)$  și  $F(2, 3)$  să aparțină dreptei  $x + ay + b = 0$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$  să verifice relația  $\hat{x}^2 = \hat{1}$ .
- (3p) c) Să se calculeze produsul matricelor  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  și  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (3p) d) Să se determine rangul matricei  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{10}$ .

 2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^x + \ln(x^2 + 1)$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f''(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f'(x) dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $[0, \infty)$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x^2}{3x^3 + 4} dx$ .

*Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro*

PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

***Varianta 078***

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră numărul complex  $z = a + bi$ , cu  $a, b \in \mathbf{R}$  și notăm  $\bar{z} = a - bi$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $z + \bar{z}$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $z \cdot \bar{z}$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$ .
- (2p) d) Să se determine  $c, d \in \mathbf{R}$ , știind că numărul complex  $x = 3 + 4i$  verifică ecuația  $x^2 + cx + d = 0$ .
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ , există  $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ , astfel încât  $z^n = a_n \cdot z + b_n$ .
- (2p) f) Să se arate că pentru  $\forall w \in \mathbf{C}$  și  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ , există polinomul cu coeficienți reali  $f = X^n + pX + q$ , cu proprietatea că  $f(w) = 0$ .
- (2p) g) Să se arate că numărul complex  $x = 3 + 4i$  nu poate fi rădăcină pentru nici un polinom  $g \in \mathbf{R}[X]$ , de forma  $g = X^{2007} + r$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2\sqrt{x}$  și sirurile  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$  și  $(c_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $b_n = a_n - f(n)$ ,  $c_n = a_n - f(n+1)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Să se arate că funcția  $f'$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(0, \infty)$ .
- (2p) c) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că  $\forall k > 0$ , există  $c \in (k, k+1)$ , astfel încât  $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt{c}}$ .
- (2p) d) Să se arate că  $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$ ,  $\forall k \in (0, \infty)$ .
- (2p) e) Să se arate că sirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător iar sirul  $(c_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător.
- (2p) f) Să se arate că sirurile  $(b_n)_{n \geq 1}$  și  $(c_n)_{n \geq 1}$  sunt convergente.
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- (2p) h) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

## Varianta 78

**Subiectul I.**

- a)  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1$ .  
 b)  $2\sqrt{3}$ .  
 c) Tangenta prin  $P$  la hiperbolă are ecuația  $2x - 3y - 1 = 0$ .  
 d) Punctele  $L, M, N$  sunt coliniare, deoarece  $\overrightarrow{LN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$ .  
 e)  $V_{ABCD} = 3$ .  
 f)  $a = -\frac{1}{2}$  și  $b = -\frac{1}{2}$

**Subiectul II.**

1.

- a)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$ .  
 b) Probabilitatea căutată este  $p = \frac{2}{5}$ .  
 c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ .  
 d) Rangul matricei este egal cu 1.

e)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{10} = I_2$ .

2.

- a)  $f''(x) = e^x + 2 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$ .  
 b)  $\int_0^1 f'(x) dx = e - 1 + \ln 2$ .  
 c)  $f'(x) > 0, \quad \forall x \geq 0$ , deci  $f$  este strict crescătoare pe  $[0, \infty)$ .  
 d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e + 1$ .  
 e)  $\int_0^1 \frac{x^2}{3x^3 + 4} dx = \frac{1}{9} \cdot \ln \frac{7}{4}$ .

**Subiectul III.**

- a)  $z + \bar{z} = 2a$ .

b)  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ .

c) Se verifică prin calcul direct.

d) Pentru  $c, d \in \mathbf{R}$ , numărul  $x = 3 + 4i$  este o soluție a ecuației  $x^2 + cx + d = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 25 \\ c = -6 \end{cases}.$$

e) Se folosește primul principiu de inducție și punctul c).

f) Considerăm  $w \in \mathbf{C}$ . Din e) rezultă că pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , există

$$a_n, b_n \in \mathbf{R}, \text{ astfel încât } w^n = a_n w + b_n.$$

Pentru  $p = -a_n \in \mathbf{R}$  și  $q = -b_n \in \mathbf{R}$ , alegem  $f \in \mathbf{R}[X]$ ,  $f = X^n + pX + q$ .

g) Demonstrăm, mai general, că  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , numărul  $x = 3 + 4i$  nu este rădăcină pentru nici un polinom de forma  $g(X) = X^n + r \in \mathbf{R}[X]$ .

Din e) știm că pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , există  $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ , astfel încât  $x^n = a_n x + b_n$ .

Mai mult, şirurile  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  verifică relațiile de recurență:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n a_2 + b_n \\ b_{n+1} = a_n b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 6 \cdot a_n + b_n \\ b_{n+1} = -25 \cdot a_n \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$

Din relațiile anterioare se demonstrează imediat, prin inducție, că

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2, a_n, b_n \in \mathbf{Z} \text{ și } a_n \equiv 1 \pmod{5}.$$

Rezultă că  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_n \neq 0$ , de unde deducem concluzia.

#### Subiectul IV.

a)  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in (0, \infty)$ .

b)  $f''(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$ , deci funcția  $f'$  este strict descrescătoare pe  $x \in (0, \infty)$ .

c) Pentru  $k \in (0, \infty)$ , funcția  $f$  este o funcție Rolle pe  $[k, k+1]$  și din teorema lui

Lagrange și din a) deducem că există  $c \in (k, k+1)$  astfel încât  $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt{c}}$ .

d) Folosind succesiv punctele b), c) și a), obținem concluzia.

e) Pentru  $n \in \mathbf{N}^*$ , avem

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - (2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n})^{\text{d)} < 0 \text{ și } c_{n+1} - c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - (2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1})^{\text{d)} > 0$$

deci şirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător iar şirul  $(c_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător.

f) Pentru  $n \in \mathbf{N}^*$  avem  $b_n - c_n = f(n+1) - f(n) > 0$  și folosind monotonia celor două şiruri deducem:  $\forall n \in \mathbf{N}^*, c_1 < c_n < b_n < b_1$ .

Obținem că şirurile  $(b_n)_{n \geq 1}$  și  $(c_n)_{n \geq 1}$  sunt convergente, fiind monotone și mărginite.

Mai mult,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

**g)** Deoarece şirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  este convergent, obținem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 2\sqrt{n}) = +\infty$ .

**h)** Şirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  este convergent, și:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{b_{2n} - b_n}{\sqrt{n}} + \frac{2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{n}} \right] = 2(\sqrt{2}-1).$$