EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….077

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(6,4)$ și $C(5,-3)$.

(4p) **a)** Să se calculeze lungimea segmentelor AB și AC.

(4p) **b)** Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $m(\hat{A})$.

(4p) **d)** Să se determine coordonatele simetricului punctului C față de B.

(2p) **e)** Folosind eventual formula $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$, să se arate că $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

(2p) **f)** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\dfrac{3-4i}{-4+3i}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze numărul $\lg 1000$.

(3p) **b)** Șirul $a_1, a_2, 12, 17, a_5, a_6, \ldots$ este o progresie aritmetică.

Să se determine termenul a_1 și rația progresiei.

(3p) **c)** Să se demonstreze că $x^4+x^2+1=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se determine coeficientul lui x^3 din dezvoltarea $(2+x)^4$.

(3p) **e)** Se consideră propoziția $P(n)$: $(n-1)(n^2-4)(n^2-9)=(n^2-1)(n^2-4)(n-3)$.
Să se determine probabilitatea ca alegând un număr natural mai mic sau egal cu 5, propoziția $P(n)$ să fie adevărată.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)+\dfrac{1}{x^2}$, pentru $x>0$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\int_1^2 f''(x)\,dx$.

(3p) **d)** Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât punctul $A(2,\alpha)$ să aparțină graficului funcției.

(3p) **e)** Să se arate că $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\forall\, x>0$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numerele reale distincte a, b, c, d, funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, $h(x) = 2x + 1$ şi determinanţii $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ şi $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se verifice că $f'(a) = (a-b)(a-c)(a-d)$.

(2p) **e)** Să se arate că $A = \Delta$.

(2p) **f)** Dezvoltând determinantul A după ultima linie, să se arate că $\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 1$.

(2p) **g)** Să se arate că $\frac{h(a)}{f'(a)} + \frac{h(b)}{f'(b)} + \frac{h(c)}{f'(c)} + \frac{h(d)}{f'(d)} = 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$, $g(x) = e^{-x^2}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x), f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(0), f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^5}$.

(2p) **d)** Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei g.

(2p) **e)** Să se arate că $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se demonstreze inegalitatea $f(x) < 0$, $\forall x < 0$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că aria suprafeţei cuprinsă între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$ este un număr din intervalul $(0{,}74; 0{,}75)$.

Varianta 077

Subiectul I

a) $|AB| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $|AC| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

b) $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = 0$.

c) Din b) $\Rightarrow m(BAC) = 90^0$.

d) Fie C' simetricul lui C fata de B $\Rightarrow x_{C'} = 2x_B - x_C = 7$. $y_{C'} = 2y_B - y_C = 11 \Rightarrow C'(7,11)$.

e) $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

f) $|z| = \left|\dfrac{3-4i}{-4+3i}\right| = 1$

Subiectul II

1. a) lg 1000=3. b) din a_4=17 si a_3=12 $\Rightarrow$ r=5 si $a_3=a_1+2r$ $\Rightarrow$ a_1=2. c)Se demonstrează prin calcul.
   d) Coef $x^3 = 2 \cdot C_4^3 = 8$. e) $P = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2. a) $f'(x) + \dfrac{1}{x^2} = 1$, $\forall$ x>0. b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 1 - 1 = 0$.

c) $\int_1^2 f''(x) \Big|_1^2 = f'(2) - f'(1) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. d) A(2,a)$\in G_f \Leftrightarrow$ f(2)=$a \Rightarrow a = \dfrac{5}{2}$.

e) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} + x = f(x)$, $\forall$ x>0.

Subiectul III

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y^2 - yx & z^2 - xz \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$.

b) Inmulțim fiecare linie L_i cu (-a) şi adunăm rezultatul la linia L_{i+1} pentru i =3,2 respectiv 1 şi obținem un determinant din care dăm factori comuni (b-a)(c-a)(d-a) şi după dezvoltarea sa după primul element găsim un determinant de tipul Δ_1 (din pct.a). $\Rightarrow \Delta$ egal cu produsul căutat.

c) f'(x)=(x-b)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-c).

d) din (c) $\Rightarrow$ f'(a) = (a-b)(a-c)(a-d).

e) A= $\Delta + \Delta'$, unde Δ' are ultima linie egală cu o combinație liniară ale celorlalte linii ale sale ($L_4=2L_3+3L_2+4L_1$) $\Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow A = \Delta$

f) Dezvoltăm A după ultima linie

$$\Rightarrow \frac{-g(a)\cdot\Delta}{(d-a)(c-a)(b-a)} + \frac{g(b)\cdot\Delta}{(b-a)(c-b)(d-b)} + \frac{-g(c)\cdot\Delta}{(c-a)(d-c)(c-b)} + \frac{g(d)\cdot\Delta}{(d-a)(d-b)(d-c)} \overset{(d)}{=}$$

$$= \Delta \cdot \left(\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)}\right) \overset{(e)}{\Longrightarrow} \text{Suma căutată =1.}$$

g) Deoarece ultima linie a lui A este o combinaţie liniară ale primelor două linii ($L_4= -2L_2-L_1$)

$\Rightarrow$ A = 0. Dezvoltând A după ultima linie şi folosind A $=0 \overset{(d)}{\Rightarrow} \frac{h(a)}{f'(a)}+\frac{h(b)}{f'(b)}+\frac{h(c)}{f'(c)}+\frac{h(d)}{f'(d)}=0$

Subiectul IV

a) $f''(x)=e^x-1-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}$. $f'''(x)=e^x-1-\frac{x}{1!}$. $f^{(4)}(x)=e^x-1$.

b) $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=0$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{20x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{60x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{120x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{120}=\frac{1}{120}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}=0\in R \Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală laG_g la $+\infty$

e) Pentru $\begin{cases} x<0 \Rightarrow f^{(4)}(x)<0 \\ x>0 \Rightarrow f^{(4)}(x)>0 \end{cases} \Rightarrow f^{(3)}$ strict crescătoare pe $(0,\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty,0) \Rightarrow x=0$ este punct de minim pentru $f^{(3)} \Rightarrow f^{(3)}(x)\geq 0, \forall x\in \mathbf{R} \Rightarrow f''$ strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ şi din $f''(0)=0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x)<0, \forall x<0 \Rightarrow f' \text{ descrescatoare pe} (-\infty,0) \\ f''(x)>0, \forall x>0 \Rightarrow f' \text{ crescatoare pe} (0,\infty). \end{cases} \Rightarrow x=0$ punct minim pentru f' şi din $f'(0)=0 \Rightarrow f'(x)\geq 0, \forall x\in \mathbf{R}$.

f) Deoarece $f'(x)\geq 0, \forall x\in \mathbf{R}$ $f'(0)=0 \Rightarrow$ f strict crescătoare pe **R**. $f(0)=0$ rezultă că $f(x)<0, \forall x<0$.

g) Din e) şi f) $\Rightarrow f'(x)>0, \forall x<0 \Leftrightarrow e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}, \forall x<0$ (a)

$$f(x)<0, \forall x<0 \Leftrightarrow e^x<1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}, \forall x<0 \quad \text{(b)}$$

Din (a), (b) $\Rightarrow 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}<e^x<1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}, \forall x<0$ (c)

Inlocuim $-x^2$ in locul lui x in relaţia (c) şi integrand membru cu membru obţinem inegalităţile:

$\frac{52}{70}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\frac{5651}{7560} \Leftrightarrow 0{,}74<\int_0^1 e^{-x^2}dx<0{,}75$, deci aria cerută este un număr din intervalul (0,74 .0,75).