

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**

**Varianța ....076**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex  $(1 - 2i)(i - 2)$ .
- (4p) b) Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$ , unde  $A(1, 2)$ ,  $B(0, 3)$  și  $C(4, 4)$ .
- (4p) c) Să se calculeze modulul vectorului  $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ .
- (4p) d) Să se determine numărul real  $a$  pentru care dreptele de ecuații  $x + 2y + 1 = 0$  și  $2x - ay - 1 = 0$  sunt perpendiculare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(1, 1, -2)$ ,  $B(1, -2, 1)$ ,  $C(-2, 1, 1)$  și  $D(-1, -2, -3)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$  astfel încât să avem egalitatea de numere complexe
- $$\frac{2+i}{i-5} = a+bi .$$

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se determine numerele naturale  $n \geq 1$  pentru care  $\sqrt{1} \cdot \sqrt{2} \cdot \dots \cdot \sqrt{n} < 5$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr  $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$  să fie divizibil cu 2 sau cu 3.
- (3p) c) Să se determine câte submulțimi ale mulțimii  $\{a, b, c, d, e\}$  conțin mulțimea  $\{a, b\}$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^x - 25 = 0$ .
- (3p) e) Să se determine valorile parametrului real  $a$  pentru care  $x^2 - ax + 9 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^{2006} + x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției  $f$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

**PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică**

**Varianța 076**

	<p>Se consideră polinoamele <math>f = X^5 - 1</math> și <math>g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1</math>.</p> <p>În mulțimea <math>M_2(\mathbf{Q})</math> se consideră matricele <math>I_2 = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>, <math>O_2 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> și <math>A = \begin{pmatrix} r &amp; t \\ s &amp; u \end{pmatrix}</math>.</p>
(4p)	a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g$ .
(4p)	b) Să se verifice că $g = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)$ , unde $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
(4p)	c) Să se arate că polinomul $g$ este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$
(2p)	d) Se consideră polinomul cu coeficienții raționali $h = X^2 + pX + q$ , $q \neq 0$ . Să se arate că restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $h$ este un polinom de gradul 1.
(2p)	e) Să se verifice că $A^2 - (r+u)A + (ru-st)I_2 = O_2$ .
(2p)	f) Să se arate că dacă $A^5 = I_2$ , atunci matricea $A$ este inversabilă.
(2p)	g) Să se arate că dacă $A^5 = I_2$ , atunci $A = I_2$ .

#### SUBIECTUL IV ( 20p )

Se consideră sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $\frac{1}{1-a} = 1+a+\dots+a^n+\frac{a^{n+1}}{1-a}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$  și  $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ .
- (4p) b) Să se deducă relația:
- $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$
- (4p) c) Să se arate că  $0 \leq \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \leq x^{2(n+1)}$ ,  $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) d) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} dx = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ .
- (2p) f) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{4}$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( a_{2n} - \frac{\pi}{4} \right)$ .

### Varianta 76

#### Subiectul I

a)  $z = -5i$

b)  $\sqrt{2} + \sqrt{13} + \sqrt{17}$

c)  $|\vec{v}| = \sqrt{29}$

d)  $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{a} = -1 \Rightarrow a = 1.$

e)  $V = 9$

f)  $a = -\frac{9}{26}; b = -\frac{7}{26}.$

#### Subiectul II

1. a)  $\sqrt{1}\sqrt{2} \dots \sqrt{n} = \sqrt{n!} < 5 \Leftrightarrow n \in \{1, 2, 3, 4\}$

b) 3 divide pe 3, 6, 9, iar 2 divide pe 2, 4, 6, 8, 10  $\Rightarrow$  probabilitatea este  $\frac{7}{10}$ .

c)  $\{a, b\}$  este continuta neaparat in multimile cautate, dar c, d, e pot fi din acestea sau nu  $\Rightarrow$  exista  $2^3 = 8$  submultimi cautate.

d)  $5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2.$

e)  $x^2 - ax + 9 > 0 \Leftrightarrow \Delta = a^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow a \in (-6, 6)$

2. a)  $f'(x) = 2006x^{2005} + 1$

b) Daca  $x$  este un punct de extrem, atunci  $f'(x) = 0 \Rightarrow x^{2005} = \frac{-1}{2006} \Rightarrow x = \sqrt[2005]{\frac{-1}{2006}}$

c)  $f''(x) = 2006 \cdot 2005x^{2004} \geq 0, (\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$  este convexa pe  $\mathbf{R}$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2007$

e)  $\int_0^1 f(x) dx = \left( \frac{x^{2007}}{2007} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2009}{4014}.$

#### Subiectul III

a)  $Q(x) = x - 1, R(x) = 0.$  b) Avem  $a + b = 1, a \cdot b = -1$  si

$$(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1) = x^4 + (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 + (a+b)x + 1.$$

c) Singura descompunere a lui  $g$  in  $\mathbf{R}[X]$  este cea de la b), descompunere

in care polinoamele  $(x^2 + ax + 1)$  si  $(x^2 + bx + 1)$  nu sunt in  $\mathbf{Q}[X].$

d) Se efectueaza impartirea. e) Se verifica f)  $A^5 = I_2 \Rightarrow (\det A)^5 = 1 \Rightarrow \det A = 1 \neq 0.$

g)  $A^5 = I_2 \Leftrightarrow f(A) = 0.$  Daca notam  $h = X^2 - (r+u)X - (ru-st)$  mai avem  $h(A) = 0.$  Din d)

f = q · h + r cu grad r = 1, deci  $f(A) = q(A)h(A) + r(A).$  Rezulta  $r(A) = 0 \Rightarrow A = \alpha I_2$  cu  $\alpha \in \mathbf{Q}$

si din  $A^5 = I_2 \Rightarrow \alpha^5 = 1,$  deci  $A^5 = I_2$

#### Subiectul IV

a) Folosim formula pentru progresie geometrica:  $1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ .

b) Luam in a),  $a = -x^2$

c)  $1 + x^2 \geq 1$ .

$$d) \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2(n+1)} dx = \frac{1}{2n+3} > 0$$

$$e) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

f) Integrăm relația de la b) între 0 și 1 și conform lui e) avem:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} dx.$$

Dacă trecem la limita, din d) rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{4}$ .

$$g) Avem \frac{\pi}{4} = a_{2n} - \int_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2} dx \Rightarrow a_{2n} - \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2} dx \Rightarrow n(a_{2n} - \frac{\pi}{4}) =$$

$$= n \int_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2} dx = \frac{n}{4n+3} \int_0^1 (x^{4n+3})' \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{n}{4n+3} \left( \frac{x^{4n+3}}{1+x^2} \right)_0^1 - \int_0^1 x^{4n+3} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = \\ \frac{n}{4n+3} \left( \frac{1}{2} + 2 \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{(1+x^2)^2} dx \right)$$

$$\text{Intrucat } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{4n+2}}{(1+x^2)^2} dx = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}.$$