

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta075

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $(\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^4$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(4,5)$ la dreapta $x - y + 5 = 0$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $x^2 - 5y^2 = 20$ dusă prin punctul $P(5,1)$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(1, 2, 3)$, $M(2, 3, 4)$ și $N(3, 4, 5)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(-1, 1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(2, -1, 1)$ și $D(4, 5, 6)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(3-i)^3 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se verifice identitatea $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, $\forall x > 0$
- (3p) b) Să se arate că $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1$
- (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_4$ să verifice relația $\hat{x}^3 = \hat{x}^2$
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x + 3^x = 12$.
- (3p) e) Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f = X^4 - X^2 - 24$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2^{-x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se determine ecuația asymptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, care are proprietățile $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$ și $f(1)=1$.

- (4p) a) Să se verifice că $f(0)=0$.
- (4p) b) Să se verifice că $f(-x)=-f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, avem $f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$.
- (2p) d) Să se arate că $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.
- (2p) f) Să se arate că $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, există $r \in \mathbf{Q}$, astfel încât $a < r < b$.
- (2p) g) Să se arate că dacă funcția f este monotonă pe \mathbf{R} , atunci $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{2}{3}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$,

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ și funcțiile } f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R} \text{ și } g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R},$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{1}{2}\right), \quad g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{5}{3}\right) + \ln\left(x + \frac{2}{3}\right), \quad \forall x \in (0, \infty).$$

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x > 0$.
- (4p) b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.
- (4p) c) Să se verifice că $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$ și $g'(x) < 0$, $\forall x > 0$.
- (2p) d) Utilizând rezultatele de la punctele b) și c), să se arate că $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall x > 0$.
- (2p) e) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict crescător și sirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.
- (2p) f) Să se arate că $0 < b_n - a_n < \frac{1}{6n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că sirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt convergente și au aceeași limită.

Varianta 075

Subiectul I

- a) 25 . b) $2\sqrt{2}$. c) $x-y=4$. d) L, M, N coliniare $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LN}$ e) $V = \frac{91}{6}$. f) $a=18$ și $b=-26$.

Subiectul II

- 1.a) Se verifica prin calcul direct.b) $\frac{99}{100}$.c) Probabilitatea ceruta este $\frac{3}{4}$.d) $x=1$ solutie unica. e) -24 .
 2.a) $f'(x)=1-2^{-x} \ln 2$.b) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \ln 2}$.c) $f''(x)dx = 2^{-x} \cdot (\ln 2)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ convexa pe \mathbf{R} .d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - \frac{\ln 2}{2}$.f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-x) = 0 \in \mathbf{R} \Rightarrow y=x$ asimptota oblica la $+\infty$

Subiectul III

- a) $f(0)=0$ obtinem, daca in relatia ceruta se inlocuieste $x=y=0$.
 b) Pentru $y=-x$ din relatia data $\Rightarrow f(x)+f(-x)=0 \Rightarrow f(-x)=-f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.
 c) Fie $P(n)$: $f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n), n \in \mathbf{N}, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$
 Pentru $n=1$, $P(1)$: $f(a_1) = f(a_1)$ este adevarata.
 $P(n+1)$: $f(a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n+1}), n \in \mathbf{N}, a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbf{R}$
 Avem $f(a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}) = f((a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1}) = f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + f(a_{n+1}) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + f(a_{n+1}), n \in \mathbf{N}, a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbf{R}$
 d) Pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$ in relatia c) avem $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$.
 $\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$
 e) $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{n}\right) = m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}, \forall \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}_+$ si $f\left(-\frac{m}{n}\right) = -f\left(\frac{m}{n}\right) = -\frac{m}{n} \forall n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = x, \forall x \in \mathbf{Q}$
 f) Fie $b-a=c>0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbf{N}^*: \frac{1}{n_0} < c$. Deoarece sirul $\left(\frac{n}{n_0}\right), n \in \mathbf{N}^*$ este progresie aritmetica \Rightarrow cel putin unul dintre termenii progresiei se afla in (a,b).
 g) Reducere la absurd: presupunem $\exists x \in \mathbf{R}: f(x) \neq x \Rightarrow f(x) < x$ sau $f(x) > x$. Tratam primul caz: $f(x) < x \Rightarrow \exists r \in \mathbf{Q}: f(x) < r < x \Leftrightarrow f(r) < f(x)$ dar $f(r) = r \Rightarrow r < f(x)$ contradicție.
 La fel se trateaza și al doilea caz.

Subiectul IV

a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+\frac{3}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x+1)(2x+3)(x+1)^2}$

$$g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+\frac{5}{3}} + \frac{1}{x+\frac{2}{3}} = \frac{-3x-1}{(3x+5)(3x+2)(x+1)^2}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ln 1 = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$

c) $f'(x) > 0, \forall x > 0$ și $g'(x) < 0, \forall x > 0$ (din a)

d) Din (c) $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ strict crescatoare pe } \mathbf{R} \text{ si din (b)} \Rightarrow f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \\ g \text{ strict descrescatoare pe } \mathbf{R} \text{ si din (b)} \Rightarrow g(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \end{cases}$

deci $f(x) < 0 < g(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

e) Se verifica prin calcul ca $a_{n+1} - a_n = g(n) > 0, \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict crescător și $b_{n+1} - b_n = f(n) < 0, \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ strict descrescător.

f) $b_n - a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{6n+3}\right) < \frac{1}{6n+3} < \frac{1}{6n}, \forall n \in \mathbf{N}^*$ si din (e) $\Rightarrow b_n - a_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

g) din e), f), $\Rightarrow a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots < b_n < \dots < b_1 \Rightarrow$ sirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}, (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sunt mărginite si strict monotone, deci sunt convergente. Dar f) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{6n} = 0 \Rightarrow$ cele două siruri au aceeași limită.