

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....074***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze suma de numere complexe  $(1+2i)^2 + (1-2i)^2$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $\cos^2 \frac{\pi}{13} + \sin^2 \frac{\pi}{13}$ .
- (4p) c) Să se determine  $a \geq 0$ , știind că vectorul  $\vec{v} = (a+1)\cdot\vec{i} + a\cdot\vec{j}$  are modulul egal cu 5.
- (4p) d) Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC cu laturile  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 5$ .
- (2p) e) Să se determine ecuația planului care trece prin punctul  $A(2, 1, 1)$  și este paralel cu planul de ecuație  $x + y + z = 2$ .
- (2p) f) Să se scrie ecuația tangentei la cercul de ecuație  $x^2 + y^2 = 200$  în punctul  $T(10, 10)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se determine numărul soluțiilor întregi ale inecuației  $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{3} \cdot \hat{4} + \hat{5} \cdot \hat{6}$  în inelul  $\mathbf{Z}_{12}$ .
- (3p) c) Să se arate că  $\log_2 16 + \log_3 \sqrt{81}$  este un număr natural.
- (3p) d) Să se afle câte numere de forma  $\overline{abc}$  există, știind că  $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ .
- (3p) e) Să se determine probabilitatea ca un element din  $\mathbf{Z}_8$  să fie soluție a ecuației  $\hat{x}^4 = \hat{1}$ .

 2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = xe^{-x}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) c) Să se arate că  $e^x \geq ex$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se determine punctele de inflexiune ale funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**PROBA D. M1: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, specializarea matematică-informatică**
***Varianta 074***

**SUBIECTUL III (20p)**

Se consideră  $G = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid \det(A) \in \{-1, 1\}\}$ ,  $H = \{A \in M_2(\mathbf{C}) \mid \det(A) = 1\}$  și

$$\text{matricele } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}, \text{ cu } a \in \mathbf{R}^* \text{ și } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se arate că  $X, Z \in G$ ,  $Y, I_2 \in H$ .
- (4p) b) Să se demonstreze că dacă  $A, B \in H$ , atunci  $A \cdot B \in H$ . (Se știe că determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinantelor lor).
- (2p) c) Să se arate că orice matrice din mulțimea  $G$  este inversabilă și inversa ei este în  $G$ .
- (4p) d) Să se arate că  $Z^2 = I_2$ .
- (2p) e) Să se demonstreze că ecuația matriceală  $U^2 = I_2$  are în mulțimea  $H$  numai soluțiile  $U = I_2$  și  $U = -I_2$ .
- (2p) f) Să se arate că ecuația matriceală  $U^2 = I_2$  are o infinitate de soluții în mulțimea  $G$ .
- (2p) g) Să se arate că nu există o funcție bijectivă  $f : G \rightarrow H$  astfel încât  $f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$ , pentru orice  $A, B \in G$ .

**SUBIECTUL IV (20p)**

Se consideră funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e \cdot x^{n+1} - (n+2) \cdot a^n \cdot x + n \cdot a^{n+1}$ ,

unde  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$  și sirurile de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(g_n)_{n \geq 1}$ ,

$$\text{cu } a_n \geq 0, \quad g_n = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f(0)$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in [0, \infty)$ .
- (4p) c) Să se arate că ecuația  $f'(x) = 0$  are o unică soluție în mulțimea  $[0, \infty)$ .
- (4p) d) Notăm cu  $t_n$  această soluție.
- (2p) e) Să se arate că  $f(t_n) \geq 0$  și că  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \geq 0$ .
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_{n-1} + g_n + n \cdot g_n \leq e(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) g) Știind că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2]{2!} + \dots + \sqrt[n]{n!}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = e$ , să se determine cel mai mic  $c > 0$  astfel încât pentru orice sir  $(x_n)_{n \geq 1}$ , cu  $x_n \geq 0$  și orice  $n \in \mathbf{N}^*$  să fie adevărată inegalitatea
- $$\sum_{k=1}^n (x_1 \cdot \dots \cdot x_k)^{\frac{1}{k}} \leq c(x_1 + \dots + x_n), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

### Varianta 074

**Subiectul I:**

a) Calcul direct. b)  $\cos^2 \frac{\pi}{13} + \sin^2 \frac{\pi}{13} = 1$ . c)  $a = 3$ . d) Cu teorema lui Pitagora obtinem  $AM=4$ , unde M este mijlocul lui BC . e)  $x + y + z = 4$ . f)  $x+y=20$

**Subiectul II:**

1) a)  $x \in [2,3] \cap Z = \{2,3\}$ . b)  $S = \hat{8}$ . c)  $\log_2 16 + \log_3 \sqrt{81} = 6 \in \mathbf{N}$ .

d) Numarul numerelor  $\overline{abc}$  este 27. e)  $\hat{x} \in Z_8 : \hat{x}^4 = 1 \Rightarrow$  probabilitatea este:  $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ . b)  $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ .

c)  $e^x - ex \geq 0$  deoarece functia  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^x - ex$  are minimul egal cu 0 in punctul 1

d)  $f'(x) = \frac{x-2}{e^x}$  ce are solutia unica 2 si isi schimba semnul in vecinatatea lui  $x_0 = 2$

singurul punct de inflexiune pentru f.e)  $\int_0^1 f(x)dx = 1 - \frac{2}{e}$ .

**Subiectul III:**

a)  $\det X = -1$ ,  $\det Z = -1$ ,  $X, Z \in M_2(\mathbf{R})$ ,  $-1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow x, z \in G$

$Y, I_2 \in M_2(C)$ ,  $\det Y = 1$ ,  $\det I_2 = 1 \Rightarrow Y, I_2 \in H$

b)  $A, B \in H \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \Rightarrow AB \in H$

c)  $A \in G \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \in M_2(R) : A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \pm A^* \in M_2(\mathbf{R})$  și

$A \cdot A^{-1} = \det I_2 \Rightarrow \det A^{-1} \in \{-1, 1\} \Rightarrow A^{-1} \in G$ .

d) Se verifică prin calcul direct ca  $Z^2 = I_2$

e) Fie  $U = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ ,  $x, y, z, u \in C$  astfel încât  $U^2 = I_2 \Rightarrow (\det U)^2 = \det I_2 = 1$ ,  $U \in H \Rightarrow$

$\det U = xu - yz = 1$ ,  $\det U^2 = I_2 \Rightarrow x+u \neq 0$ ,  $y=z=0$ , obținem solutiile  $\pm I_2 \in H$

f) Fie  $U = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \in G : U^2 = I_2 \Rightarrow \det(U) = -1$ , cazul  $\det U = 1$  am tratat la punctul c).

Cazul  $\det U = -1$ . Din relațiile obtinute din ipoteza ajungem la relațiile  $yz=1$ ,  $x=0 \Leftrightarrow u=0$

$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & \bar{z} \end{pmatrix}$ ,  $z \in \mathbf{R}^*$  sau la solutiile  $x=-u$ ,  $y=\frac{1-u^2}{z}$ ,  $z \in \mathbf{R}^* \Rightarrow U = \begin{pmatrix} -u & \frac{1-u^2}{z} \\ z & u \end{pmatrix}$ , deci

la o infinitate de solutii.

g) Reducere la absurd. Presupunem ca

$\exists f : G \rightarrow H$  bijectiva :  $f(AB) = f(A)f(B)$ , pt  $(\forall) A, B \in G$

Fie  $U \in G$ ,  $U^2 = I_2 \Rightarrow f(U^2) = (f(U))^2$ ,  $f(U^2) = f(I_2) = I_2 \Rightarrow (f(U))^2 = I_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(U) = \pm I_2$ . pe de altă parte  $\Rightarrow$  ec.  $v^2 = I_2$ , are o infinitate de solutii in G.

Să notăm cu  $U_{a_k} = \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ \frac{1}{a_k} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a_k \in \mathbf{R}^*, k \in \mathbf{N}$  solutiile ecuației  $\Rightarrow f(U_{a_k}) = I_2$  ce

contrazice injectivitatea lui  $f$ .

#### Subiectul IV:

a)  $f(0) = n \cdot a^{n+1}$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot e = \infty$

b)  $f'(x) = (n+1)e x^n - (n+2)a^n$

c) Din faptul că  $f''(x) = n(n+1)e x^{n-1}$  are soluția  $t_n$  unică și  $f'' \geq 0, (\forall)x \geq 0 \Rightarrow f'$  strict crescătoare pe  $[0, \infty]$ , deci rezolvând ecuația  $f'(x) \geq 0$  obținem unică soluție

$$t_n = a \sqrt[n]{\frac{n+2}{(n+1)e}}, a \geq 0, n \in \mathbf{N}^*$$

d) Calculăm  $f(t_n) = t_n \left[ \frac{(n+2)a^n}{(n+1)} - (n+2)a^n \right] + na^{n+1} = na^n \left( a - t_n \frac{n+1}{n+2} \right)$

$$f(t_n) \geq 0 \Leftrightarrow t_n \leq a \frac{n-1}{n-2} \Leftrightarrow e \geq \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1}, \text{ adevărat.}$$

e) Din

$$f(x) \geq 0, (\forall)x \geq 0, \forall a \geq 0, \text{ pentru } .a = g_n^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow ex^{n+1} - (n+2)g_n^{\frac{n}{n+1}}x + ng_n \geq 0, (\forall)x \geq 0.$$

Pentru

$$x = a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow ea_{n+1} - (n+2)g_n^{\frac{n}{n+1}}a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} + ng_n \geq 0, (\forall)n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow ea_{n+1} - (n+2)g_{n+2} + ng_n \geq 0$$

f) Se demonstrează prin inducție relația notată cu  $P(n)$ . Din definiția lui  $g_n$  rezultă că  $p(1)$  adevărată.

Presupunem  $P(k)$  adevărată și demonstrăm că  $P(k+1)$  este adevărată., unde

$$P(k+1): g_1 + g_2 + \dots + g_k + (k+2)g_{k+1} \leq e(a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1})$$

Avem relația  $P(k)$ :  $g_1 + g_2 + \dots + g_{k-1} + (k+1)g_k \leq e(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ . Adunând la ambeii membrii  $e \cdot a_{k+1}$  se obține:

$$e \left( \sum_{i=1}^{k+1} a_i \right) \geq ea_{k+1} + g_1 + g_2 + \dots + g_{k-1} + (k+1)g_k \geq (k+2)g_{k+1} + g_1 + \dots + g_{k-1} + g_k \text{ pe baza}$$

inegalității de la e). Deci inegalitatea are loc pentru orice  $n \in \mathbf{N}^*$

$$= g_1 + \dots + g_k + (k+2)g_{k+1}$$

$$g) \text{ Din f) } \Rightarrow e(x_1 + x_2 + \dots + x_n) > g_1 + g_2 + \dots + g_n \Rightarrow c \leq e.$$

Inlocuim  $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \dots, x_n = \frac{1}{n}$  în inegalitatea următoare :

$$\sum_{k=1}^n (x_1 \cdot \dots \cdot x_k)^{\frac{1}{k}} \leq c \sum_{k=1}^n x_k \Rightarrow (1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}) / (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) \leq c \Rightarrow c \geq e, (\text{facand } n \rightarrow \infty \text{ în relația anterioră}). \text{ Deci } c = e$$