

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta073

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $i^{200} + i^{201} + i^{202} + i^{203}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2)$ la dreapta $x + y + 4 = 0$.
- (4p) c) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 9$ și dreapta de ecuație $x = -y$.
- (4p) d) Să se determine numărul real a astfel încât punctele $L(-1, -2)$, $M(-2, -3)$ și $N(-3, a)$ să fie coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 1)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(1+i)^{10} = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se determine numărul elementelor mulțimii $M_2(\mathbf{Z}_3)$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ să fie soluție a ecuației $x(x-1)(x-2)(x-3) = 0$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, are inversa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, să se calculeze $g(0)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1} - 3^x - 2 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze numărul de submulțimi cu număr impar de elemente, ale mulțimii $\{a, b, c, d, e\}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x) dx$.
- (3p) c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f pe intervalul $(0, 2\pi)$.
- (3p) d) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f pe intervalul $(0, 2\pi)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{C}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$ și formulele $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$, $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$ și $2 \sin a \cos a = \sin 2a$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (4p) b) Să se verifice că $f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, $\forall x \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$.
- (4p) c) Să se arate că rădăcinile polinomului f sunt $x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$
- (2p) d) Să se verifice că $f = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_{n-1})$.
- (2p) e) Să se arate identitatea $n = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{n-1})$.
- (2p) f) Să se arate că $\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.
- (2p) g) Să se arate că $\sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$ și sirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ și $(c_n)_{n \geq 1}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \quad b_n = a_n - f(n), \quad c_n = a_n - f(n+1), \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 1.$$

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (2p) c) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că $\forall k \geq 1$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.
- (2p) d) Să se arate că $\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} < \frac{3}{2} \sqrt[3]{(k+1)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{k^2} < \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$, $\forall k \geq 1$.
- (2p) e) Să se arate că sirul $(b_n)_{n \geq 2}$ este strict descrescător iar sirul $(c_n)_{n \geq 2}$ este strict crescător.
- (2p) f) Să se arate că sirurile $(b_n)_{n \geq 2}$ și $(c_n)_{n \geq 2}$ sunt convergente și au aceeași limită.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) h) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}} \right)$.

Varianta 73

Subiectul I.

- a) $|i^{200} + i^{201} + i^{202} + i^{203}| = 0$.
- b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.
- c) $\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ și $\begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.
- d) $a = -4$.
- e) $S_{ABC} = \frac{1}{2}$.
- f) $a = 0, b = 32$.

Subiectul II.

1.

- a) În mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_3)$ există 81 matrice.
- b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{4}{5}$.
- c) $g(0) = -\frac{1}{3}$.
- d) $x = 0$.
- e) Există 16 submulțimi cu un număr impar de elemente ale mulțimii inițiale.

2.

- a) $f'(x) = \cos x, \forall x \in \mathbf{R}$.
- b) $\int_0^{\pi} f(x) dx = 2$.
- c) Există un singur punct de inflexiune
- d) Există două puncte de extrem local.
- e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(x) dx = 1$.

Subiectul III.

- a) $f(1) = n$.
- b) Evident.

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow x \neq 1$ și $x^n - 1 = 0 \Leftrightarrow x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n}$, pentru $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

d) Evident.

e) $n = f(1) = (1-x_1)(1-x_2) \cdot \dots \cdot (1-x_{n-1})$.

f) Avem $1-x_k = 2 \sin \frac{k\pi}{n} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \right) \right)$ și folosind e), obținem:

$$n = (1-x_1)(1-x_2) \cdot \dots \cdot (1-x_{n-1}) = 2^{n-1} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{kn}{n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$n = 2^{n-1} \left(\cos \left(\frac{3(n-1)\pi}{2} + \frac{(1+2+\dots+(n-1))\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{3(n-1)\pi}{2} + \frac{(1+2+\dots+(n-1))\pi}{n} \right) \right) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow n = 2^{n-1} (\cos(2n-2)\pi + i \sin(2n-2)\pi) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

g) Dacă în inegalitatea de la f), îi atribuim lui n valoarea $2n$, rezultă

$$\sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}} \quad (1)$$

Grupând în membrul stâng din inegalitatea (1) primul factor cu ultimul, al doilea cu penultimul, și am., deducem: $\sin^2 \frac{\pi}{2n} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2n-2}}$, de unde obținem egalitatea cerută.

Subiectul IV.

a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

b) $f''(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, aşadar funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

c) Considerăm $k \in (0, \infty)$. Funcția f este o funcție Rolle pe $[k, k+1]$ și din teorema lui Lagrange și din punctul a) deducem că există $c \in (k, k+1)$, $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$

d) Folosind pe rând punctele b), c) și a) rezultă concluzia.

e) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n - (f(n+1) - f(n)) < 0$

$$c_{n+1} - c_n = a_{n+1} - a_n - (f(n+2) - f(n+1)) > 0$$

deci sirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător iar sirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

f) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem $b_n - c_n = f(n+1) - f(n) > 0 \quad (1)$

și folosind monotonia celor două siruri deducem: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_1 < c_n < b_n < b_1$.

Obținem că sirurile $(b_n)_{n \geq 1}$ și $(c_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente, fiind monotone și mărginite.

Mai mult, dacă notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, trecând la limită în (1) deducem
 $b - c = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

g) Deoarece sirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x} \right) = +\infty$.

h) Deoarece sirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent, obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}} \right) \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n^3} - a_n}{n^2} = \frac{3}{2}.$$