

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta072

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi 4 și 5.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $E(-2, 3)$ la dreapta $x - 2y + 3 = 0$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2 = 8x$ în punctul $P(2, 4)$.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $L(1, 1)$, $M(2, 2)$, $N(-1, 2)$.
- (2p) e) Să se calculeze cosinusul unghiului făcut de vectorii $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $P(2, 4)$ și $Q(4, 2)$ să aparțină dreptei de ecuație $x + ay + b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze 2^{2007} în \mathbf{Z}_5 .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_7$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.
- (3p) c) Să se determine $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, care verifică egalitatea $C_n^2 = 10$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4^x + 4) = x + 2$.
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f = X^4 - X^2 - 24$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

SUBIECTUL III (20p)

Dacă $X \in M_2(\mathbf{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm prin \bar{X} , matricea $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$, unde \bar{z} este conjugatul

numărului complex z . Considerăm funcția $f : M_2(\mathbf{C}) \rightarrow M_2(\mathbf{C})$, $f(X) = \bar{X}$.

Pentru o matrice inversabilă $A \in M_2(\mathbf{C})$, definim funcția $g_A : M_2(\mathbf{C}) \rightarrow M_2(\mathbf{C})$,

$$g_A(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}, \quad \forall X \in M_2(\mathbf{C}).$$

- (4p) a) Să se verifice că $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ și $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\forall z, w \in \mathbf{C}$.
- (4p) b) Să se arate că $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ și $f(X \cdot Y) = f(X) \cdot f(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$.
- (4p) c) Să se arate că $(f \circ f)(X) = X$, $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este inversabilă și să se calculeze inversa ei.
- (2p) e) Să se arate că $g_A(X+Y) = g_A(X) + g_A(Y)$
și $g_A(X \cdot Y) = g_A(X) \cdot g_A(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$.
- (2p) f) Să se arate că funcția g_A este bijectivă.
- (2p) g) Să se arate că pentru orice matrice inversabilă $A \in M_2(\mathbf{C})$, $f \neq g_A$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin $f_0(x) = e^x$ și $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$,

$\forall n \in \mathbf{N}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f_1(x) = e^x - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f_0 .
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$f_{n+1}(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (2p) e) Să se arate că $0 < f_n(x) \leq e^x \cdot \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x > 0$.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$, $\forall x > 0$.
- (2p) g) Știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, să se calculeze
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} \right).$$

Varianta 072

Subiectul I

a) $\sqrt{41}$. b) $d(E,d)=\sqrt{5}$. c) $y = x + 2$ d) $A = \frac{3}{2}$; e) $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$;

e) $\{a = 1, b = -6\}$

Subiectul II

1. a) In Z_5 $\hat{2}^{4k} = \hat{1}, \forall k \in \mathbf{N} \Rightarrow \hat{2}^{2007} = \hat{2}^3 = \hat{3}$. b) Probabilitatea este $\frac{2}{7}$. c) $n = 5$. d) $x = 1$.

e) $\sum_{i=1}^n (x_i^2) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - 2\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j\right) = 2$.

2. a) $f'(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$. b) $\int_0^{\pi} f(x) dx = 4$.

c) $f''(x) \leq 0, (\forall) x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f$ este concava

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \cos 1 - 3 \sin 1$; e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Subiectul III

a) Se verifică prin calcul simplu relațiile: $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ și $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \forall z, w \in \mathbf{C}$

$$f(X + Y) = \overline{(X + Y)} = \overline{X} + \overline{Y} = f(X) + f(Y)$$

$$f(X \cdot Y) = \overline{X \cdot Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y} = f(X) \cdot f(Y), \forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$$

c) $(f \circ f)(X) = f(f(X)) = \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} = X, \forall X \in M_2(\mathbf{C})$

d) din c) rezulta $f^{-1} = f$

e)

$$g_A(X + Y) = A(X + Y)A^{-1} = (AX + AY)A^{-1} = AXA^{-1} + AYA^{-1} = g_A(X) + g_A(Y), \forall X, Y \in M_2(\mathbf{C}).$$

$$g_A(XY) = A(XY)A^{-1} = AX(A^{-1}A)YA^{-1} = (AXA^{-1})(AYA^{-1}) = g_A(X)g_A(Y), \forall X, Y \in M_2(\mathbf{C}).$$

f) Deoarece $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$ astfel incat $g_A(X) = g_A(Y) \Leftrightarrow AXA^{-1} = AYA^{-1}$ obtinem $X=Y$

(inmultim egalitatea cu A^{-1} la stanga si cu A la dreapta) si \Rightarrow ca g_A este injectiva si pentru

$\forall Y \in M_2(\mathbf{C})$ astfel incat $g_A(X) = Y \Rightarrow X = A^{-1}YA \in M_2(\mathbf{C}) \Rightarrow g_A$ este surjectiva, deci bijectiva.

g) Reducere la absurd: Presupunem ca $\exists A \in M_2(\mathbf{C})$ astfel incat $f(X) = g_A(X)$,

$$\forall X \in M_2(\mathbf{C}) \Leftrightarrow \overline{X} = AXA^{-1}. \text{ Alegem } X = iI_2 \in M_2(\mathbf{C}) \Rightarrow \overline{iI_2} = iAI_2A^{-1} \Leftrightarrow$$

$$-iI_2 = iI_2, \text{ fals.}$$

Subiectul IV

a) Pentru $n=0$ din relația de recurență obținem $f_1(x) = \int_0^x f_0(t) dt \Rightarrow f_1(x) = e^x - 1$.

b) Pentru $n=1 \Rightarrow f_2(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x (e^t - 1) dt = (e^t - t) \Big|_0^x = e^x - x - 1$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \in \mathbf{R} \Rightarrow y = 0$ asimptota orizontala la G_f la $-\infty$.

d) Notam cu $P(n) : f_{n+1}(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$.

Deoarece $P(0) : f_1(x) = e^x - 1$ adevarata (din a)) mai ramane de aratat ca din $P(k)(a) \Rightarrow$

$P(k+1)(a)$, unde $P(k) : f_{k+1}(x) = e^x - 1 - \sum_{i=1}^k \frac{x^i}{i!}$ este adevarata si

$P(k+1) : f_{k+2}(x) = e^x - 1 - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{x^i}{i!}$. Din relatia de recurenta

$$\Rightarrow f_{k+2}(x) = \int_0^x f_{k+1}(t) dt = \int_0^x \left(e^t - 1 - \sum_{i=1}^k \frac{t^i}{i!} \right) dt = \left(e^t - t - \frac{t^2}{2!} - \dots - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \right) \Bigg|_0^x \Rightarrow P(k+1) \text{ adevarat}$$

$\Rightarrow P(n)$ adevarat, $(\forall)n \in \mathbf{N}$.

e)

I. $P(n) : 0 < f_n(x), \forall n \in \mathbf{N}, \forall x > 0$. Verificam ca $P_0 : 0 < f_0(x)$ (a) si din $P(k)(a) \Rightarrow P(k+1)$

unde $P(k) : 0 < f_n(x)(a) \forall x \in (0, \infty)$. Deoarece $f_{k+1}(x) = \int_0^x f_k(t) dt > 0$ (din $P(k)(a) \Rightarrow$

$P(n)(a) \forall x > 0$ si $\forall n \in \mathbf{N}$.

II. Notam $P(n) : f_n(x) \leq e^x \frac{x^n}{n!}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x > 0$. $P(0) : f_0(x) \leq e^x \Leftrightarrow e^x \leq e^x$ (a), si din

$P(k) : f_k(x) \leq e^x \frac{x^k}{k!}$ avem de aratat $P(k+1) : f_{k+1}(x) \leq e^x \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \dots - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{x^k}{k!} \leq e^x \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Leftrightarrow f_k(x) - \frac{x^k}{k!} \leq e^x \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Fie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = f_{k+1}(x) - e^x \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow l_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ si

$h'(x) = f_k(x) - e^x \frac{x^k}{k!} - e^x \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow h$ str. cresc. pe $(0, \infty) \Rightarrow h(x) \leq 0, \forall x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{k+1}(x) \leq e^x \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow P(n)$ este adevarata pentru orice $n \in \mathbf{N}, \forall x > 0$.

f) Din e) $\Rightarrow 0 < e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \dots - \frac{x^n}{n!} \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right] = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$.

g) $f_{2n+1}(x) = e^x - 1 - \sum_{k=12}^{2n} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow f_{2n+1}(1) + f_{2n+1}(-1) = e + \frac{1}{e} - 2 \left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} \right) \Rightarrow$

\Rightarrow limita cautata este $L = \frac{e + e^{-1}}{2}$.